

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ  
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ ΜΑΡΘΑ

# **Μέθοδοι γρήγορης επίλυσης δομημένων δικτύων τροφοδοσίας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων**

Επιβλέποντες Καθηγητές:

Ευμορφόπουλος Νέστορας

Τσομπανοπούλου Παναγιώτα

Μποζάνης Παναγιώτης

Βόλος, Ιούνιος 2012



<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....</b>	<b>4</b>
<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....</b>	<b>6</b>
<b>1.1 ΔΙΚΤΥΑ ΔΙΑΝΟΜΗΣ ΙΣΧΥΟΣ .....</b>	<b>6</b>
<b>1.2 ΔΙΚΤΥΑ ΔΙΑΝΟΜΗΣ ΙΣΧΥΟΣ ΜΕ ΔΟΜΗ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ.....</b>	<b>7</b>
<b>2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ.....</b>	<b>9</b>
<b>2.1 ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ.....</b>	<b>9</b>
<b>2.2 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ.....</b>	<b>13</b>
<b>2.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΡΑΚΤΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ.....</b>	<b>14</b>
<b>3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ .....</b>	<b>18</b>
<b>3.1 ΜΕΘΟΔΟΣ PRECONDITIONED CONJUGATE GRADIENTS (ΠΡΟΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΖΥΓΩΝ ΚΛΙΣΕΩΝ) .....</b>	<b>18</b>
<b>3.1.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ .....</b>	<b>18</b>
<b>3.1.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ .....</b>	<b>19</b>
<b>3.1.3 ΣΥΓΚΛΗΣΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΠΡΟΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΣΥΖΥΓΩΝ ΚΛΙΣΕΩΝ (PRECONDITIONED CONJUGATE GRADIENTS) .....</b>	<b>20</b>
<b>3.1.4 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΙΝΑΚΑ ΠΡΟ-ΡΥΘΜΙΣΗΣ (ΠΡΟΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΗΣ) .....</b>	<b>21</b>
<b>3.2 ΜΕΘΟΔΟΣ CYCLIC REDUCTION (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ) .....</b>	<b>23</b>
<b>3.2.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ .....</b>	<b>23</b>
<b>3.2.2 Η ΦΑΣΗ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ (CYCLIC REDUCTION).....</b>	<b>23</b>
<b>3.2.3 Η ΦΑΣΗ ΤΗΣ ΠΙΣΩ-ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ (CYCLIC REDUCTION BACK-SUBSTITUTION) .....</b>	<b>25</b>
<b>3.2.4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΔΕΞΙΟΥ ΜΕΛΟΥΣ.....</b>	<b>27</b>
<b>3.3 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ BUNEMAN – ΜΙΑ ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ.....</b>	<b>28</b>
<b>3.3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ .....</b>	<b>28</b>
<b>3.3.3 ΨΕΥΔΙΚΩΔΙΚΑΣ ΜΕΘΟΔΟΥ BUNEMAN.....</b>	<b>31</b>
<b>3.3.2 ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ .....</b>	<b>32</b>
<b>4. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ .....</b>	<b>33</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB.....</b>	<b>40</b>
<b>A. ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ.....</b>	<b>40</b>
<b>B. ΚΩΔΙΚΑΣ ΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΕΙ ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ ΠΡΟ-ΡΥΘΜΙΣΗΣ .....</b>	<b>43</b>
<b>Γ. ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ BUNEMAN .....</b>	<b>43</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΝΑΦΟΡΕΣ .....</b>	<b>48</b>

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο προορισμός του δικτύου τροφοδοσίας ισχύος είναι να διανέμει τις τάσεις τροφοδοσίας και γείωσης σε όλη τη σχεδίαση. Στις καινούργιες και χαμηλότερες τεχνολογίες, καθώς περιορίζονται οι διαστάσεις, μεγαλώνει η συχνότητα και αυξάνεται η κατανάλωση ισχύος, οδηγούμεστε σε μεγάλη ροή ρεύματος στο δίκτυο τροφοδοσίας και γείωσης, κάτι το οποίο επηρεάζει την απόδοση και την αξιοπιστία. Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την ανάλυση χρονικής απόκρισης των δικτύων τροφοδοσίας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων με άμεσες και επαναληπτικές μεθόδους.

Αναλυτικότερα, στο πρώτο (1<sup>ο</sup>) κεφάλαιο περιγράφονται τα δίκτυα διανομής ισχύος και κάποια φαινόμενα που επηρεάζουν την αξιοπιστία και την απόδοση του κυκλώματος. Τα βασικά φαινόμενα που επηρεάζουν την ακεραιότητα τροφοδοσίας είναι η αυξημένη πτώση τάσης (IR-drop) και ο επαγωγικός θόρυβος, τα οποία μπορούν να δημιουργήσουν προβλήματα χρονισμού, ενώ η ηλεκτρομεταμόσχευση επηρεάζει την αξιοπιστία και την απόδοση του κυκλώματος.

Στο δεύτερο (2<sup>ο</sup>) κεφάλαιο περιγράφεται το μοντέλο και μεταβατική ανάλυση του δικτύου τροφοδοσίας. Πιο αναλυτικά, εξαιτίας της παρουσίας των C και L στοιχείων σε ένα πλήρες μοντέλο RLC, θα χρησιμοποιηθεί η Τροποποιημένη Μέθοδος των Κόμβων (Modified Nodal Analysis) – αντί για την απλή Μέθοδο των Κόμβων – για την ανάλυση του δικτύου τροφοδοσίας. Με βάση αυτή την ανάλυση προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Επίσης δίνεται ένα παράδειγμα πρακτικού δικτύου τροφοδοσίας.

Στο τρίτο (3<sup>ο</sup>) κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την γρήγορη επίλυση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων που προκύπτει στο προηγούμενο κεφάλαιο. Πιο αναλυτικά από τις επαναληπτικές μεθόδους αναφέρονται οι μέθοδος Προσταθεροποιημένων Συζυγών Κλίσεων (Preconditioned Conjugate Gradients, η μέθοδος Επαναληπτικής Αναγωγής (Cyclic Reduction) μέθοδος του Buneman.

Στο πέμπτο (4<sup>ο</sup>) κεφάλαιο παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα της ανάλυσης του δικτύου τροφοδοσίας. Πιο συγκεκριμένα αναφέρονται λεπτομερώς οι

παράμετροι προσομοίωσης του δικτύου τροφοδοσίας καθώς και τα αποτελέσματα της των δοκιμαστικών εφαρμογών για διάφορα μεγέθη δικτύων.

Η εκπόνηση της εργασίας αυτής δεν θα ήταν δυνατή χωρίς τη συμβολή και βοήθεια του επιβλέποντα καθηγητή κ. Ευμορφόπουλου Νέστορα καθώς και τους καθηγητές κ. Τσομπανοπούλου Παναγιώτα και κ. Μποζάνη Παναγιώτη τους οποίους και θα ήθελα να ευχαριστήσω.

# 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 ΔΙΚΤΥΑ ΔΙΑΝΟΜΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

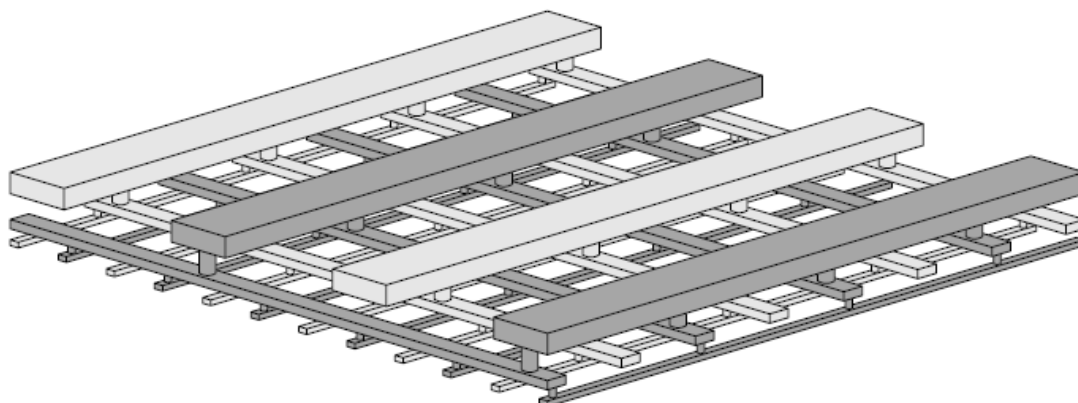
Για τους επεξεργαστές υψηλών επιδόσεων, ο σχεδιασμός και η επαλήθευση των δικτύων διανομής ισχύος έχει δημιουργήσει κρίσιμα θέματα. Τα δίκτυα διανομής ισχύος κατανέμουν τις τάσεις τροφοδοσίας και γείωσης από τη θέση του υποβάθρου έως όλα τα εξαρτήματα σε μια διάταξη. Καθώς αυτά τα εξαρτήματα διακλαδίζονται και παίρνουν ρεύμα από το δίκτυο διανομής ισχύος, αναπτύσσεται μια πτώση τάσης δια μέσου του δικτύου διανομής ισχύος εξαιτίας της αντίστασής του. Η εκτεταμένη πτώση τάσης σε σημεία διανομής διατάξεων, μπορεί να προκαλέσει προβλήματα που σχετίζονται με την απόδοση και τη λειτουργικότητα. Ένα βασικό πρόβλημα είναι το γεγονός ότι η ελαττωμένη τάση σε μια διάταξη μειώνει την οδήγηση, κατά συνέπεια την απόδοση του επεξεργαστή. Τυπικά, ένας επεξεργαστής έχει σχεδιαστεί με μια αναμενόμενη πτώση τάσης μεταξύ 5% και 10% της τάσης τροφοδοσίας. Η προσομοίωση και χρονική επαλήθευση του επεξεργαστή εκτελούνται καθώς συνυπολογίζεται αυτός ο προϋπολογισμός. Ωστόσο, αν η πτώση τάσης στο δίκτυο ισχύος υπερβεί τον προϋπολογισμό αυτό, θα επιβραδυνθούν οι διατάξεις που είναι κρίσιμες ως προς την ταχύτητα και το ολοκληρωμένο κύκλωμα δεν θα προσεγγίσει τον προτεινόμενο στόχο απόδοσης. Ένα ακόμη πρόβλημα είναι και ο θόρυβος που εισέρχεται στο ολοκληρωμένο κύκλωμα λόγω των διακυμάνσεων της τάσης στα σημεία διανομής ισχύος. Ο θόρυβος που προέρχεται από το δίκτυο ισχύος μπορεί να συγκριθεί με άλλες πηγές θορύβου, όπως ο θόρυβος που προέρχεται από τις χωρητικότητες παράλληλων πλακών, και πρέπει να ληφθούν υπ' όψη κατά την ανάλυση θορύβου στο ολοκληρωμένο κύκλωμα. Επίσης, η υψηλή μέση πυκνότητα του ρεύματος σε ένα δίκτυο διανομής ισχύος οδηγεί σε εκτεταμένη φθορά στα καλώδια μετάλλου, εξαιτίας της ηλεκτρομεταναστευσης. Αν αυτό συμβαίνει για μια αρκετά εκτεταμένη χρονική περίοδο, μπορεί να προκληθεί φθορά στα καλώδια και κατά συνέπεια να αυξήσει την πτώση τάσης στο δίκτυο τροφοδοσίας και να επιφέρει γενική απώλεια ισχύος σε συγκεκριμένα σημεία. Επειδή η ηλεκτρομεταναστευση επιφέρει ιδιαίτερα σοβαρά προβλήματα σε μονοκατευθυντικά ρεύματα, τα δίκτυα διανομής

ισχύος είναι επιρρεπή σε προβλήματα αυτής της φύσεως. Ένα ακόμη θέμα που επηρεάζει την απόδοση των δικτύων διανομής ισχύος είναι η περιοδική ταλάντευση των πηγών τροφοδοσίας που προκύπτει από τον συντονισμό της αυτεπαγωγής του πακέτου και της χωρητικότητας αποσύζευξης που βρίσκεται πάνω στο ολοκληρωμένο κύκλωμα, γεγονός που οδηγεί σε περιοδικές άνω της ονομαστικής τάσεις τροφοδοσίας. Αυτές οι τάσεις άνω του αναμενόμενου προκαλούν φθορά στις πύλες οξειδίου και αλλοιώνουν τα χαρακτηριστικά της διάταξης.

## **1.2 ΔΙΚΤΥΑ ΔΙΑΝΟΜΗΣ ΙΣΧΥΟΣ ΜΕ ΔΟΜΗ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ**

Τα δίκτυα διανομής ισχύος με δομή πλέγματος, όπως φαίνονται στην εικόνα (1), χρησιμοποιούνται ευρέως σε ολοκληρωμένα κυκλώματα αυξημένης πολυπλοκότητας και υψηλών επιδόσεων. Κάθε επίπεδο ενός πλέγματος διανομής ισχύος αποτελείται από πολλές γραμμές ίσου μεγέθους που ισαπέχουν μεταξύ τους. Η κατεύθυνση των γραμμών ισχύος και γείωσης μέσα σε κάθε επίπεδο είναι ορθογώνια στην κατεύθυνση των γραμμών στα γειτονικά επίπεδα. Οι γραμμές ισχύος και γείωσης αλληλο-εμπλέκονται μέσα σε κάθε επίπεδο. Κάθε γραμμή ισχύος και γείωσης είναι συνδεδεμένη μέσω άλλων γραμμών ισχύος και γείωσης, αντίστοιχα, στα γειτονικά επίπεδα σε επικαλυπτόμενες θέσεις. Σε ένα τυπικό ολοκληρωμένο κύκλωμα όσο πιο χαμηλό είναι το επίπεδο του μετάλλου τόσο πιο μικρό είναι το μέγεθος και η κλίση των γραμμών. Η απότομη κλίση του ανώτερου επιπέδου μετάλλου βελτιώνει την χρησιμότητα των πόρων μετάλλου, κάνοντας την προσαρμογή στην κλίση των υποβάθρων εισόδου/εξόδου του πακέτου, ενώ η καλή κλίση των κατώτερων επιπέδων του πλέγματος φέρνουν την παροχή ισχύος και γείωσης σε κοντινή απόσταση από το κάθε κύκλωμα που βρίσκεται πάνω στο ολοκληρωμένο κύκλωμα, διευκολύνοντας την σύνδεση αυτών των κυκλωμάτων στη τροφοδοσία και τη γείωση. Τα δίκτυα διανομής ισχύος είναι αρκετά πιο δυνατά σε σχέση με τα δίκτυα διανομής ισχύος με δίοδο. Υπάρχουν πολλαπλά πλεονάζοντα μονοπάτια ρεύματος ανάμεσα στους ακροδέκτες τροφοδοσίας του κάθε φόρτου κυκλώματος και των υποβάθρων τροφοδοσίας. Εξαιτίας αυτής της ιδιότητας, η ευστάθεια της παροχής ρεύματος είναι λιγότερο ευαίσθητη σε αλλαγές των απαιτήσεων ισχύος του ρεύματος των ξεχωριστών ομάδα λογικών πυλών του κυκλώματος. Η αστοχία του κάθε τμήματος του πλέγματος δεν

είναι κρίσιμη για τη διανομή ισχύος σε οποιοδήποτε οποιαδήποτε ομάδα λογικών πυλών.



Εικόνα 1: Ένα δίκτυο διανομής ισχύος πολλαπλών επιπέδων. Οι γραμμές γείωσης έχουν ανοιχτό γκρι χρώμα και οι γραμμές τροφοδοσίας έχουν σκούρο γκρι χρώμα. Η κλίση, το πλάτος και το πάχος των γραμμών είναι μικρότερο στα κατώτερα επίπεδα σε σχέση με τα ανώτερα.

Ένα επιπρόσθετο πλεονέκτημα των δικτύων διανομής ισχύος είναι η αυξημένη ακεραιότητα των σημάτων δεδομένων που είναι πάνω στο ολοκληρωμένο κύκλωμα εξαιτίας των ιδιοτήτων χωρητικής και επαγωγικής προστασίας των γραμμών τροφοδοσίας και γείωσης. Είναι σύνηθες να χρησιμοποιείται ένα ποσοστό 20% ως 40% των πόρων μετάλλου για την οικοδόμηση ενός δικτύου τροφοδοσίας υψηλής πυκνότητας σε σύγχρονους επεξεργαστές υψηλών επιδόσεων.



## 2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ

### 2.1 ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ

Με τον όρο powergrid αναφερόμαστε σε ένα δίκτυο διανομής ισχύος, το οποίο είναι γραμμικό και συνήθως έχει τη μορφή πλήρους ή ατελούς πλέγματος στα δύο ανώτερα επίπεδα μετάλλου. Αναλυτικότερα το δίκτυο αποτελείται από έναν αριθμό  $b$  κλάδων και έναν αριθμό  $q+p$  κόμβων. Οι κλάδοι (καλώδια) έχουν αντίσταση  $R_j = \frac{\rho}{t} \frac{l_j}{w_j} =$

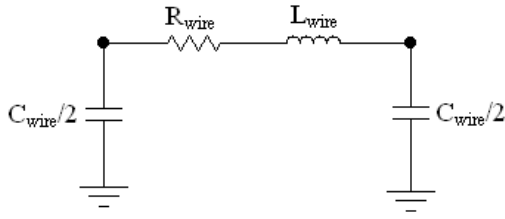
$R_{sh} \frac{l_j}{w_j}$  και αυτεπαγωγή  $L_j$ . Επίσης σε κάθε κόμβο υπάρχει χωρητικότητα προς τη γη

$$C_i = \sum_{\substack{\text{οι κλάδοι} \\ \text{που προσπίπτουν} \\ \text{στον κόμβο } i}} \left( \frac{1}{2} \bar{C}_{pp(ar)} l_{ji} w_{ji} + \frac{1}{2} \bar{C}_{ff(per)} l_{ji} \right) + C_{decap_i} + C_{pin_i} \quad [13].$$
 Επιπροσθέτως

οι  $p$  από τους  $q+p$  κόμβους δέχονται τάση τροφοδοσίας  $V_{DD}$  προς τη γη. Από τους υπόλοιπους  $q$  κόμβους οι  $n$  συνδέονται σε πηγές ρεύματος προς τη γη που αντιστοιχούν στις ομάδες-blocks πυλών που τροφοδοτούνται και αντλούν ενέργεια από το δίκτυο διανομής ισχύος (οι μεμονωμένες πύλες-cells εντός των blocks οι οποίες διατάσσονται σε οριζόντιες γραμμές τροφοδοσίας βλέπουν χαμηλές πτώσεις τάσης σε σχέση με τις τάσεις που δέχονται τα blocks λόγω μικρών ρευμάτων οπότε συνήθως δεν εξετάζονται).

Εξαιτίας της παρουσίας των  $C$  και  $L$  στοιχείων σε ένα πλήρες μοντέλο RLC, θα χρησιμοποιήσουμε την Τροποποιημένη Μέθοδο των Κόμβων (Modified Nodal Analysis) – αντί για την απλή Μέθοδο των Κόμβων – για την ανάλυση του δικτύου τροφοδοσίας, στο οποίο τα ρεύματα επαγωγής αποτελούν επιπρόσθετες μεταβλητές επιπλέον των τάσεων κόμβων. Ειδικά για τα πλέγματα που αναπαριστούν δίκτυα διανομής ισχύος τυπικά μοντελοποιούμε κάθε τμήμα καλωδίου (μεταξύ των δύο επαφών) ως μια αντίσταση σε σειρά με μια επαγωγή, με χωρητικότητες προς τη γη στους δύο κόμβους επαφής (εικόνα 2). Έτσι στην ανάλυση που ακολουθεί θα θεωρούμε τους  $b$  κλάδους του δικτύου ως σύνθετους ωμικούς – επαγωγικούς ( $R - L$ ) κλάδους.

Οι νόμοι του Kirchhoff για το ρεύμα και την τάση για το γραμμικό δίκτυο έχουν ως εξής:



Εικόνα 2: Τυπικό μοντέλο τμήματος καλωδίου σε δίκτυα τροφοδοσίας

$$\text{KCL: } [A_{rl} \quad A_c] \begin{bmatrix} i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix} = e_n(t), \quad \text{ή}$$

$$A_{rl} i_n(t) + i_c(t) = e_n(t) \quad (2.1)$$

$$\text{KVL: } \begin{bmatrix} A_{rl}^T \\ A_c^T \end{bmatrix} v_n(t) = \begin{bmatrix} v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}, \quad \text{ή}$$

$$A_{rl}^T v_n(t) = v_b(t) \quad (2.2a)$$

$$v_n(t) = v_b(t) \quad (2.2b)$$

Στα παραπάνω, ο  $A_{rl}$  είναι  $n \times b$  πίνακας προσπτώσεων σύνθετων κλάδων  $R - L$  (τυχαίες κατευθύνσεις αναφοράς), του οποίου τα στοιχεία ορίζονται ως εξής:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{όταν η διεύθυνση του κλάδου } j \text{ απέρχεται από τον κόμβο } i \\ -1, & \text{όταν η διεύθυνση του κλάδου } j \text{ είναι προς τον κόμβο } i \\ 0, & \text{όταν ο κλάδος } j \text{ δεν είναι προσπίπτων στον κόμβο } i \end{cases}$$

Επιπροσθέτως, τα  $v_n(t)$ ,  $v_b(t)$  και  $v_n(t) = v_b(t)$  είναι μεγέθους  $n \times 1$ ,  $b \times 1$  και  $b \times 1$  διανύσματα των κόμβων τάσης, κλάδων τάσης και ρεύματα κλάδων, το  $e_n(t)$  είναι ένα  $n \times 1$  διάνυσμα των διεγέρσεων των ανεξάρτητων πηγών (είτε ρεύματος είτε τάσης) στους κόμβους, το  $i_c(t)$  είναι ένα  $n \times 1$  διάνυσμα των ρευμάτων των επιπρόσθετων χωρητικών κλάδων τα οποία εμφανίζονται στους  $n$  κόμβους και  $A_c$  είναι ο πίνακας προσπτώσεων αυτών των  $n$  κλάδων, για τους οποίους ισχύει  $A_c = I_n$  (ο  $n \times n$  ταυτοτικός

πίνακας) επειδή όλοι οι χωρητικοί κλάδοι κατευθύνονται μακριά από τους κόμβους και συνδέονται με τη γή.

Οι σχέσεις ρεύματος-τάσης των  $n$  χωρητικών κλάδων και των  $b$  σύνθετων  $R - L$  κλάδων είναι οι εξής:

$$\mathbf{i}_c(t) = \mathbf{C}_n \mathbf{v}_c'(t) = \mathbf{C}_n \mathbf{v}_n'(t) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{v}_b(t) = \mathbf{R}_b \mathbf{i}_b(t) + \mathbf{L}_b \mathbf{i}_b'(t) \quad (2.4)$$

όπου  $\mathbf{v}_n'(t)$  και  $\mathbf{i}_b'(t)$  είναι οι χρονικές παράγωγοι των διανυσμάτων  $\mathbf{v}_n(t)$  και  $\mathbf{i}_b(t)$  αντίστοιχα, ο  $\mathbf{C}_n$  είναι ένας  $n \times n$  διαγώνιος πίνακας των χωρητικοτήτων των κόμβων και  $\mathbf{R}_b$ ,  $\mathbf{L}_b$  είναι πίνακες αντιστάσεων και επαγωγών μεγέθους  $b \times b$  των σύνθετων κλάδων  $R - L$ . Ο πίνακας  $\mathbf{R}_b$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας, ενώ ο  $\mathbf{L}_b$  είναι διαγώνιος είτε πλήρης αν υπάρχουν μόνο αμοιβαίες επαγωγές μεταξύ των κλάδων. Υποθέτουμε ότι κάθε κλάδος  $R - L$  έχει μη μηδενική αυτεπαγωγή και κάθε κόμβος έχει μη μηδενική χωρητικότητα, έτσι ώστε οι πίνακες  $\mathbf{L}_b$  και  $\mathbf{C}_n$  να είναι αντιστρέψιμοι.

Στην Τροποποιημένη Μέθοδο των Κόμβων αντικαθιστούμε την (2.3) στην (2.1) και την (2.4) στην (2.2α), έτσι ώστε να αποκτήσουμε το ακόλουθο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης (με αγνώστους τα  $\mathbf{v}_n(t)$  και  $\mathbf{i}_b(t)$ ):

$$\mathbf{A}_{rl} \mathbf{i}_b(t) + \mathbf{C}_n \mathbf{v}_n'(t) = \mathbf{e}_n(t) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{R}_b \mathbf{i}_b(t) + \mathbf{L}_b \mathbf{i}_b'(t) - \mathbf{A}_{rl}^T \mathbf{v}_n(t) = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

Συνδυάζοντας τα διανύσματα μεταβλητών  $\mathbf{v}_n(t)$  και  $\mathbf{i}_b(t)$  στο διάνυσμα  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(t) \\ \mathbf{i}_b(t) \end{bmatrix}$  μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις (2.5) και (2.6) ως το εξής σύστημα εξισώσεων:

$$\tilde{\mathbf{G}} \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{e}(t) \quad (2.7)$$

$$\text{όπου } \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{rl} \\ -\mathbf{A}_{rl}^T & \mathbf{R}_b \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_b \end{bmatrix}, \mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Στο παραπάνω σύστημα το  $\mathbf{v}_n(t)$  είναι το διάνυσμα των κόμβων τάσεων, αλλά το σύστημα εύκολα μπορεί να εκφραστεί ξανά λαμβάνοντας υπόψη τις πτώσεις τάσης στους κόμβους παραλείποντας τις ανεξάρτητες πηγές τάσης στο διάνυσμα διέγερσης  $\mathbf{e}_n(t)$  και αντιστρέφοντας το σήμα των πηγών ρεύματος (από  $-$  σε  $+$ ). Από αυτό το σημείο και στο εξής θα δηλώνουμε με το  $\mathbf{v}_n(t)$  το διάνυσμα των πτώσεων τάσης στους κόμβους.

Σύμφωνα με την διαφορική προσέγγιση Backward Euler για σταθερό χρονικό βήμα  $h$ , μπορούμε να αντικαταστήσουμε την χρονική παράγωγο  $\mathbf{x}'(t)$  με τον αντίστοιχο της τύπο πεπερασμένων διαφορών  $\mathbf{x}'(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-h)}{h}$  στην (2.7) και προκύπτει

$$\left( \tilde{\mathbf{G}} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right) \mathbf{x}(t) = \left( \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right) \mathbf{x}(t-h) + \mathbf{e}(t) \text{ για } t = kh, \text{ όπου } k = 1, 2, \dots, \text{ ή:}$$

$$\mathbf{x}(kh) = \left( \tilde{\mathbf{G}} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right)^{-1} \mathbf{e}(kh) + \left( \tilde{\mathbf{G}} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right)^{-1} \left( \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right) \mathbf{x}((k-1)h) \quad (2.8)$$

$$\equiv \mathbf{B}_1 \mathbf{e}(kh) + \mathbf{B} \mathbf{x}((k-1)h)$$

$$\text{όπου } \mathbf{B}_1 = \left( \tilde{\mathbf{G}} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right)^{-1} \text{ και } \mathbf{B} = \left( \tilde{\mathbf{G}} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right)^{-1} \left( \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right) = \mathbf{B}_1 \left( \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right).$$

Η δεύτερη αναφερθείσα αναδρομική σχέση χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των πτώσεων τάσης όλων των κόμβων και όλων των ρευμάτων κλάδων για συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t = kh$ , όπου  $k = 1, 2, \dots$ , βασίζεται στις πτώσεις τάσης και στα ρεύματα κλάδων όλων των προηγούμενων χρονικών στιγμών  $t = (k-1)h$ .

## 2.2 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Για την κατάλληλη μετατροπή του συστήματος (2.8) αντί να αναφέρεται η εξάρτηση από την διακριτή χρονική μεταβλητή  $t = kh$  θα γίνουν οι εξής συμβάσεις  $\mathbf{x}(kh) \equiv \mathbf{x}^k$  και  $\mathbf{e}(kh) \equiv \mathbf{e}^k$

Το σύστημα εξισώσεων (2.7) μπορεί να γραφεί:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{C}_n}{h} & \mathbf{A}_{rl} \\ -\mathbf{A}_{rl}^T & \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n^k \\ \mathbf{i}_b^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{C}_n}{h} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{L}_n}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n^{k-1} \\ \mathbf{i}_b^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n^k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathbf{C}_n}{h} \mathbf{v}_n^k + \mathbf{A}_{rl} \mathbf{i}_b^k = \frac{\mathbf{C}_n}{h} \mathbf{v}_n^{k-1} + \mathbf{e}_n^k \\ -\mathbf{A}_{rl}^T \mathbf{v}_n^k + \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \right) \mathbf{i}_b^k = \frac{\mathbf{L}_n}{h} \mathbf{i}_b^{k-1} \Rightarrow \mathbf{i}_b^k \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \right)^{-1} \frac{\mathbf{L}_n}{h} \mathbf{i}_b^{k-1} + \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \right)^{-1} \mathbf{A}_{rl}^T \mathbf{v}_n^k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathbf{C}_n}{h} \mathbf{v}_n^k + \mathbf{A}_{rl} \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \right)^{-1} \frac{\mathbf{L}_n}{h} \mathbf{i}_b^{k-1} + \mathbf{A}_{rl} \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \right)^{-1} \mathbf{A}_{rl}^T \mathbf{v}_n^k = \frac{\mathbf{C}_n}{h} \mathbf{v}_n^{k-1} + \mathbf{e}_n^k \\ \mathbf{i}_b^k = \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h} \right)^{-1} \frac{\mathbf{L}_b}{h} \mathbf{i}_b^{k-1} + \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h} \right)^{-1} \mathbf{A}_{rl}^T \mathbf{v}_n^k \end{cases}$$

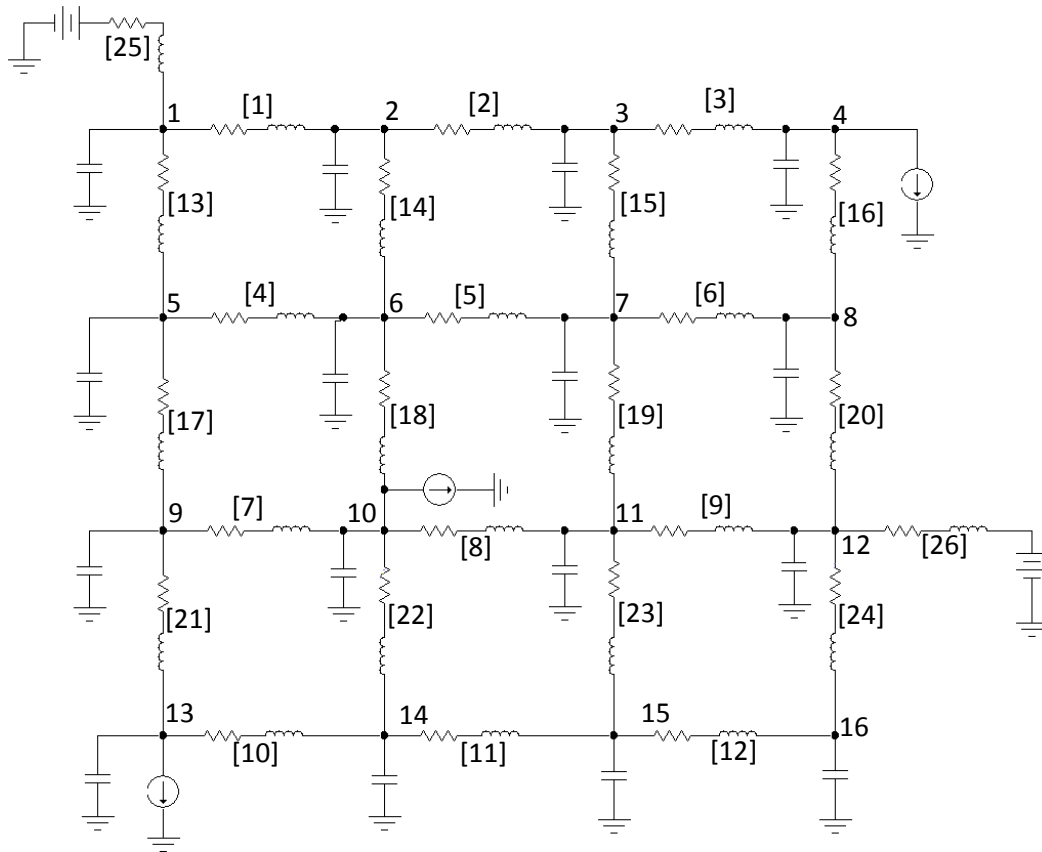
$$\Rightarrow \begin{cases} \left( \mathbf{A}_{rl} \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h} \right)^{-1} \mathbf{A}_{rl}^T + \frac{\mathbf{C}_n}{h} \right) \mathbf{v}_n^k = \frac{\mathbf{C}_n}{h} \mathbf{v}_n^{k-1} - \mathbf{A}_{rl} \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \right)^{-1} \frac{\mathbf{L}_b}{h} \mathbf{i}_b^{k-1} + \mathbf{e}_n^k (2.9) \\ \mathbf{i}_b^k = \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h} \right)^{-1} \frac{\mathbf{L}_b}{h} \mathbf{i}_b^{k-1} + \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h} \right)^{-1} \mathbf{A}_{rl}^T \mathbf{v}_n^k (2.10) \end{cases}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω καταλήγουμε σε δύο αναδρομικά συστήματα τα οποία για κάθε χρονική στιγμή  $k$  μπορούμε να λύσουμε το (2.9) ως προς το διάνυσμα πτώσεων τάσεως ( $\mathbf{v}_n^k$ ) με δεδομένα τα διανύσματα  $\mathbf{v}_n^{k-1}$  και  $\mathbf{i}_b^{k-1}$  των πτώσεων τάσης και των ρευμάτων κλάδων της προηγούμενης χρονικής στιγμής, καθώς και των διεγέρσεων  $\mathbf{e}_n^k$  της τρέχουσας χρονικής στιγμής. Μετά από την επίλυση του πρώτου από τα 2 συστήματα μπορούμε να βρούμε το διάνυσμα των ρευμάτων των κλάδων  $\mathbf{i}_b^k$  την τρέχουσα χρονική στιγμή από το δεύτερο σύστημα (2.10). Το πρώτο σύστημα (2.9) δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων της μορφής  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  με

αγνώστους το  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{v}_n^k$ , πίνακα του συστήματος τον  $\mathbf{A} = \left( \mathbf{A}_{rl} \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h} \right)^{-1} \mathbf{A}_{rl}^T + \frac{\mathbf{C}_n}{h} \right)$  και  $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{C}_n}{h} \mathbf{v}_n^{k-1} - \mathbf{A}_{rl} \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \right)^{-1} \frac{\mathbf{L}_b}{h} \mathbf{i}_b^{k-1} + \mathbf{e}_n^k$ . Το σύστημα αυτό μπορεί να επιλυθεί με οποιαδήποτε μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων, όπως η Gauss από τις άμεσες και η Jacobi ή η Gauss-Seidel από τις επαναληπτικές. Στα επόμενα κεφάλαια θα δώσουμε μια περιγραφή των γενικών μεθόδων επίλυσης γραμμικών συστημάτων, αλλά θα επιχειρήσουμε να εκμεταλλευτούμε την ειδική μορφή που έχει ο πίνακας συστήματος  $\mathbf{A}$  για τα πρακτικά δίκτυα τροφοδοσίας έτσι ώστε να αναπτύξουμε μια σειρά από πιο αποδοτικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων για τη συγκεκριμένη αυτή μορφή. Η μορφή του πίνακα συστήματος  $\mathbf{A}$  για τα πρακτικά δίκτυα τροφοδοσίας θα φανεί καλύτερα με το παράδειγμα που ακολουθεί.

## 2.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΡΑΚΤΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ

Με βάση την δομή των προηγούμενων δικτύων τροφοδοσίας όπως παρουσιάστηκε στην εισαγωγή στην εικόνα (1) και με βάση το μοντέλο κλάδου της εικόνας (2) έχουμε το ακόλουθο μοντέλο πρακτικού δικτύου τροφοδοσίας το οποίο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τεσσάρων οριζοντίων και τεσσάρων κάθετων γραμμών. Στο παρακάτω σχήμα έχουν τοποθετηθεί πηγές τάσης και 2 κόμβοι που τροφοδοτούνται από την εξωτερική πηγή τροφοδοσίας ( $V_{DD}$ ), καθώς και πηγές ρεύματος σε κόμβους από όπου ομάδες πυλών αντλούν ρεύμα από το δίκτυο τροφοδοσίας. Στους κλάδους των πηγών τάσεων έχουν τοποθετηθεί η παρασιτική αντίσταση και η παρασιτική αυτεπαγωγή του ακροδέκτη τροφοδοσίας.



Εικόνα 3: Μοντέλο RLC δικτύου τροφοδοσίας 4x4

Θεωρούμε ότι για τις τρέχουσες τεχνολογίες οι αμοιβαίες επαγωγές μεταξύ κλάδων είναι αμελητέες και ο πίνακας  $\mathbf{L}_b$  είναι διαγώνιος είτε πλήρης αν υπάρχουν αμοιβαίες επαγωγές μεταξύ των κλάδων. Στην περίπτωση μας θα υποθέσουμε την ύπαρξη μόνο αυτεπαγωγών οπότε ο  $\mathbf{L}_b$  είναι διαγώνιος και έχει μέγεθος  $n \times (b+p)$ . Οι πίνακες που προκύπτουν από το παραπάνω δίκτυο τροφοδοσίας είναι οι εξής:

$$\mathbf{A}_{rl} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & +1 & 0 & & \\ 0 & -1 & +1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_n = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_{16})$$

$$\mathbf{L}_b = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_{26})$$

$$\mathbf{R}_b = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_{26})$$

Σημείωση: Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τον πίνακα πρόσπτωσης  $\mathbf{A}$ , πρέπει να ορίσουμε μια φορά για το ρεύμα που διαρρέει τους κλάδους. Έστω πως αυτή πρέπει να είναι από αριστερά προς τα δεξιά ( $\rightarrow$ ) και από πάνω προς τα κάτω ( $\downarrow$ ).

Εφόσον οι πίνακες  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  είναι διαγώνιοι τότε και ο  $\left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h}\right)^{-1}$  είναι επίσης διαγώνιος, οπότε το γινόμενο  $\mathbf{V} = \mathbf{A} \left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h}\right)^{-1} \mathbf{A}^T$  είναι πολύ γνωστό [1] ότι έχει τις ακόλουθες ιδιότητες (i) θετικά διαγώνια στοιχεία, (ii) μη θετικά στοιχεία εκτός διαγωνίου ( $v_{ii} \leq 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ), (iii) συμμετρία  $v_{ij} = v_{ji}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , (iv) διαγώνια κυριαρχία και στις γραμμές και στις στήλες: δηλ.  $|v_{jj}| \geq \sum_{i \neq j}^n |v_{ij}|$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ . Ειδικότερα, η τελευταία αυτή ιδιότητα εξασφαλίζει ότι ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.

Επίσης είναι πολύ γνωστό λοιπόν από τη θεωρία της μεθόδου των κόμβων ότι το γινόμενο ενός πίνακα πρόσπτωσης επί έναν διαγώνιο (όπως ο  $\left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h}\right)^{-1}$ ) επί τον ανάστροφο πίνακα πρόσπτωσης έχει την εξής δομή στοιχείων [16]:

1. Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου  $v_{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) είναι το άθροισμα των στοιχείων του  $\left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h}\right)^{-1}$  που αντιστοιχούν στον κόμβο  $i$ .
2. Τα στοιχεία  $v_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$ ) που βρίσκονται εκτός της κύριας διαγωνίου, είναι το αντίθετο του διαγώνιου στοιχείου του  $\left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h}\right)^{-1}$  που συνδέει τους κόμβους  $i$  και  $j$ .

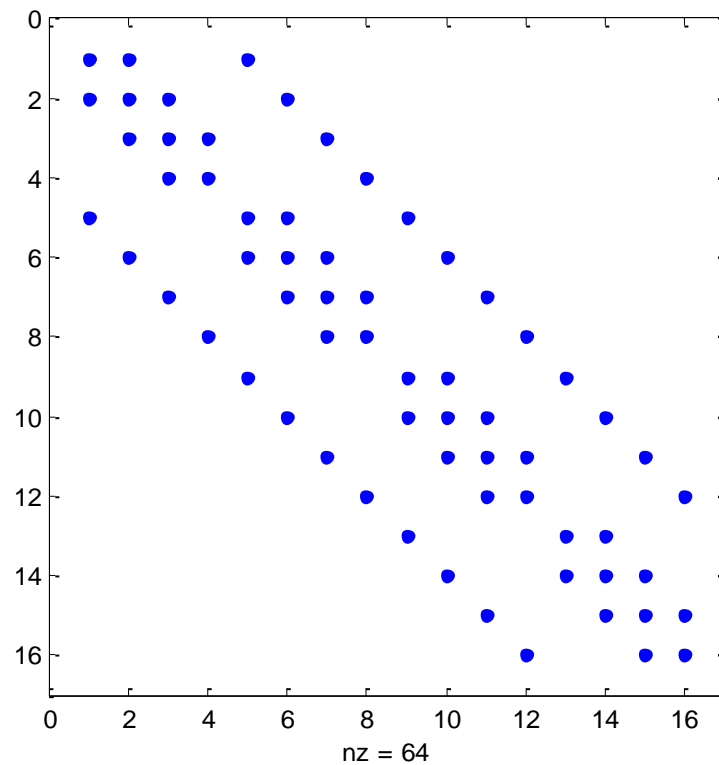
Για παράδειγμα για το δίκτυο της εικόνας 3 ο πίνακας θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{h} + g_1 + g_{13} & -g_1 & 0 & 0 & -g_{13} & \dots & 0 \\ \frac{c_2}{h} + g_1 + g_2 + g_{14} & -g_2 & -g_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -g_2 & \frac{c_3}{h} + g_2 + g_3 + g_{15} & -g_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -g_3 & \frac{c_4}{h} + g_2 + g_3 + g_{15} & 0 & \dots & 0 \\ -g_{13} & 0 & 0 & 0 & \frac{c_5}{h} + g_2 + g_3 + g_{15} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{c_{12}}{h} + g_{12} + g_{24} \end{bmatrix}$$

όπου έχουμε συμβολίσει με  $g_i = \frac{1}{r_i + \frac{1}{h}}$ .



Τέλος παρατηρούμε ότι για δίκτυα δομής πλέγματος όπως της εικόνας 3 (τα οποία αποτελούνται από οριζόντιες και κάθετες γραμμές) και με αρίθμηση των κόμβων από αριστερά προς τα δεξιά ο πίνακας του γραμμικού συστήματος έχει την παρακάτω μορφή:



Εικόνα 4: Η μορφή του πίνακα ενός γραμμικού συστήματος 25 εξισώσεων

Η μορφή της εικόνας 4 είναι μορφή ενός μπλοκ τριδιαγώνιου πίνακα (block tridiagonal) με τα διαγώνια μπλοκ να είναι απλοί τριδιαγώνιοι πίνακες ενώ τα μπλοκ εκτός διαγώνιου να είναι διαγώνιοι πίνακες.

Οι μέθοδοι που θα αναπτυχθούν στις επόμενες ενότητες επιλέχθηκαν λόγω της μορφής του πίνακα.

### 3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

#### 3.1 ΜΕΘΟΔΟΣ PRECONDITIONED CONJUGATE GRADIENTS (ΠΡΟΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΖΥΓΩΝ ΚΛΙΣΕΩΝ)

##### 3.1.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Η μέθοδος PCG (preconditioned conjugate gradient method) είναι μια αρκετά σημαντική μέθοδος επίλυσης συμμετρικών και θετικά ορισμένων συστημάτων με πίνακα προ-ρύθμισης (preconditioner matrix). Η βασική ιδέα και περιγραφή του αλγορίθμου οφείλεται στους Hestenes και Stiefel (1952) και αποτελείται μόνο από πράξεις ανάμεσα σε πίνακες με διανύσματα και διανύσματα με διανύσματα, ενώ απαιτεί την αποθήκευση τεσσάρων διανυσμάτων στην μνήμη κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του (εξαιτίας μιας ιδιότητας μικρών επαναλήψεων). Η χρήση προ-ρύθμισης μπορεί να βελτιώσει την αποδοτικότητα και ανθεκτικότητα των επαναληπτικών τεχνικών. Με απλά λόγια η χρήση προ-ρύθμισης είναι απλά ένας τρόπος μετασχηματισμού του αρχικού γραμμικού συστήματος σε ένα το οποίο έχει την ίδια λύση, αλλά είναι πολύ πιο εύκολα επιλύσιμο με μια επαναληπτική μέθοδο επίλυσης. Γενικά, η αξιοπιστία ενός επαναληπτικού αλγορίθμου επίλυσης, όσον αφορά διάφορες εφαρμογές, εξαρτάται περισσότερο από την ποιότητα ενός πίνακα προ-ρύθμισης παρά από τον ιδιαίτερο υπόχωρο Krylov που χρησιμοποιείται.

Το πρώτο βήμα για την διαδικασία προ-ρύθμισης είναι η εύρεση του κατάλληλου πίνακα  $M$ , οποίος μπορεί να οριστεί με διάφορους τρόπους αλλά πρέπει να ικανοποιεί ελάχιστες απαιτήσεις. Από πρακτικής άποψης, δύο είναι οι πιο σημαντικές απαιτήσεις για τον πίνακα  $M$ :

- Πρέπει να προσεγγίζει πολύ καλά τον  $A$  (δηλ.  $M \approx A$  ώστε  $M^{-1}A \approx I$ ) καθώς τότε η PCG συγκλίνει πολύ γρήγορα (σε μικρό αριθμό επαναλήψεων).
- Η επίλυση συστημάτων  $Mz_{(i-1)} = r^{(i-1)}$  (δηλ. το preconditioning step θα πρέπει σε κάθε επανάληψη της PCG) να είναι εύκολη και γρήγορη.

Υπάρχουν τρεις τρόποι εφαρμογής ενός πίνακα προ-ρύθμισης:

Μπορεί να εφαρμοστεί από αριστερά:

$$M^T Ax = M^T b$$

Επίσης μπορεί να εφαρμοστεί από δεξιά

$$AM^T u = b \quad x \equiv M^T u$$

Τελικά ένας πίνακας προ-ρύθμισης μπορεί να είναι διαθέσιμος σε παραγοντοποιημένη μορφή

$$M = M_L M_R$$

Όπου τυπικά οι  $M_L$  και  $M_R$  είναι τριδιαγώνιοι πίνακες. Σε αυτή την περίπτωση η διαδικασία μπορεί να σπάσει ως εξής:

$$M_L^{-1} A M_R^{-1} u = M_L^{-1} b \quad x \equiv M_R^{-1} u$$

Είναι σημαντικό να διατηρήσουμε τη συμμετρία όταν ο αρχικός πίνακας είναι συμμετρικός, έτσι ο προ-ρυθμιστής διαχωρισμού είναι υποχρεωτικός σε αυτή την περίπτωση.

### 3.1.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ

Θεωρούμε ένα συμμετρικό, θετικά ορισμένο πίνακα  $A$  και υποθέτουμε ότι είναι διαθέσιμος ένας πίνακας προ-ρύθμισης  $M$ . Ο πίνακας προ-ρύθμισης  $M$  είναι ένας πίνακας που προσεγγίζει τον  $A$ . Θεωρούμε επίσης ότι ο  $M$  είναι επίσης συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Τότε κάποιος μπορεί να προ-ρυθμίσει το σύστημα με έναν από τους τρεις τρόπους που προαναφέραμε:

*Αρχικά γίνεται μια υπόθεση για τη λύση  $x^{(0)}$*

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$$

*Για  $k = 0, 1, 2, \dots$ , μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη σύγκλισης*

$$iter = iter + 1$$

$$Επίλυση του συστήματος  $Mz_{(i-1)} = r^{(i-1)} \quad // \text{Αυτό το βήμα ουσιαστικά λύνει}$$$

$$\rho_{i-1} = r^{(i-1)T} r^{(i-1)} \quad // \text{το ισοδύναμο σύστημα}$$

$$Αν  $i=1 \quad // M^{-1}Ax = M^{-1}b$$$

$$p^{(1)} = z^{(0)}$$

αλλιώς

$$\beta_{i-1} = \frac{\rho_{i-1}}{\rho_{i-2}}$$

$$p^{(i)} = z^{(i-1)} + \beta_{i-1}p^{(i-1)}$$

Τέλος αν

$$q^{(i)} = Ap^{(i)}$$

$$a_i = \frac{\rho_{i-1}}{p^{(i)T}q^{(i)}}$$

$$x^{(i)} = x^{(i-1)} + a_i p^{(i)} \quad // \text{ νέα υπόθεση για το } x^{(i)}$$

$$r^{(i)} = r^{(i-1)} - a_i q^{(i)} \quad // \text{ νέο υπόλοιπο}$$

Τέλος

### 3.1.3 ΣΥΓΚΛΗΣΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΠΡΟΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΣΥΖΥΓΩΝ ΚΛΙΣΕΩΝ (PRECODITIONED CONJUGATE GRADIENTS)

Αν η  $x_k$  είναι η ακριβής λύση του γραμμικού συστήματος  $Ax = b$ , με συμμετρικό θετικά ορισμένο πίνακα  $A$ , τότε η εφαρμογή του αλγορίθμου με συμμετρικό, θετικά ορισμένο πίνακα προ-ρύθμισης θα συγκλίνει με βάση το εξής όριο:

$$\frac{\|x - x_i\|_A}{\|x - x_0\|_A} \leq 2 \left( \frac{\sqrt{i}-1}{\sqrt{i}+1} \right)^i \text{ για } i \geq 0$$

Όπου  $i = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$  είναι η αναλογία της μικρότερης και μεγαλύτερης ιδιοτιμής του  $MA$  και  $x_i$  είναι η προσεγγιστική λύση με τη μέθοδο συζύγων κλίσεων. Η σύγκλιση της μεθόδου εξαρτάται από τον αριθμό κατάστασης του  $A'^{-1}A$  ( $\text{cond}(A'^{-1}A)$ ), ο  $A'^{-1}A$  θα πρέπει να πλησιάζει αρκετά τον μοναδιαίο ή να έχει ιδάνικά κατανεμημένες ιδιοτημές) όπου ο  $A'$  είναι ο πίνακας προ-ρύθμισης. Αν  $A' \approx A$ , ο αριθμός κατάστασης θα είναι πολύ μικρός και κατ' επέκταση η μέθοδος θα συγκλίνει γρήγορα.

### 3.1.4 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΙΝΑΚΑ ΠΡΟ-ΡΥΘΜΙΣΗΣ (ΠΡΟΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΗΣ)

Η εικόνα 3 δείχνει ένα κανονικό δσδιάστατο δίκτυο τροφοδοσίας το οποίο θα χρησιμοποιηθεί ως παράδειγμα. Ο πίνακας που προκύπτει ως αποτέλεσμα αν χρησιμοποιήσουμε αρίθμηση κόμβων είναι  $A \left( R_b + \frac{L_b}{h} \right)^{-1} A^T$  ο οποίος γράφεται σε μορφή μπλοκ τριδιαγώνιου πίνακα:

$$\begin{bmatrix} B_1 & C & & \\ C & B_2 & C & \\ & C & B_3 & C \\ & & C & B_4 \end{bmatrix}$$

όπου κάθε μπλοκ εκτός διαγώνιου είναι διαγώνιος πίνακας της μορφής  $C = -g_v I$ , ενώ τα διαγώνια μπλοκ είναι τριδιαγώνιοι πίνακες της μορφής:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{c_n}{h} + g_v + g_p + g_h & -g_h & & \\ -g_h & \frac{c_n}{h} + g_v + 2g_h & -g_h & \\ & -g_h & \frac{c_n}{h} + g_v + 2g_h & -g_h \\ & & -g_h & \frac{c_n}{h} + g_v + g_p + g_h \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \frac{c_n}{h} + g_h + 2g_v & -g_h & & \\ -g_h & 2(g_h + g_v) + \frac{c_n}{h} & -g_h & \\ & -g_h & 2(g_h + g_v) + \frac{c_n}{h} & -g_h \\ & & -g_h & \frac{c_n}{h} + g_h + 2g_v \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} \frac{c_n}{h} + g_h + g_v & -g_h & & \\ -g_h & 2g_h + g_v + \frac{c_n}{h} & -g_h & \\ & -g_h & 2(g_h + g_v) + \frac{c_n}{h} & -g_h \\ & & -g_h & \frac{c_n}{h} + g_h + g_v \end{bmatrix}$$

Στις παραπάνω σχέσεις ισχύει,  $g_p \equiv \frac{1}{r_p + \frac{l_p}{h}}$ ,  $g_h \equiv \frac{1}{r_h + \frac{l_h}{h}}$ ,  $g_v \equiv \frac{1}{r_v + \frac{l_v}{h}}$  όπου  $r_h$ ,  $r_v$  είναι η μέση οριζόντια και κάθετη κλαδική αντίσταση,  $l_h$ ,  $l_v$  είναι η μέση οριζόντια και κάθετη κλαδική επαγωγή,  $c_n$  είναι η μέση χωρητικότητα ανά κόμβο,  $r_p$ ,  $l_p$  είναι η αντίσταση

και η επαγωγή των ακροδεκτών τροφοδοσίας και  $h_k$  είναι η ανάλυση ρεύματος ανά βήμα χρόνου.

Αν προσθέσουμε  $g_h$ , στο πρώτο και το τελευταίο στοιχείο όλων των διαγώνιων μπλοκ  $B_1, B_2, B_3$  και επιπλέον να προσθέσουμε  $g_v$  σε όλα τα διαγώνια στοιχεία του άνω αριστερού και κάτω δεξιού μπλοκ  $B_1, B_3$  τότε πολλαπλασιάζοντας όλο τον πίνακα με  $\frac{1}{g_v}$  και παραλείποντας κάθε στοιχείο  $g_p$  που προκύπτει από τους ακροδέκτες τροφοδοσίας, λαμβάνουμε τον παρακάτω πίνακα που προσεγγίζει τον  $A$  πολύ καλά και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πίνακας προ-ρύθμισης:

$$M = \begin{bmatrix} B & -I & & \\ -I & B & -I & \\ & -I & B & -I \\ & & -I & B \end{bmatrix}$$

όπου

$$B = \frac{1}{g_v} \begin{bmatrix} \frac{c_n}{h} + 2(g_h + g_v) & -g_h & & \\ -g_h & 2(g_h + g_v) + \frac{c_n}{h} & -g_h & \\ & -g_h & 2(g_h + g_v) + \frac{c_n}{h} & -g_h \\ & & -g_h & \frac{c_n}{h} + 2(g_h + g_v) \end{bmatrix}$$

Άρα η γενίκευση για ένα δίκτυο τροφοδοσίας  $m_1 \times m_2$ , θα είναι ένας πίνακας προ-ρύθμισης που θα αποτελείται από  $m_2$  μπλοκ μεγέθους  $m_1 \times m_1$  και έχει τη μορφή:

$$M = \begin{bmatrix} B & -I & & \\ -I & B & \ddots & \\ & -I & \ddots & -I \\ & & \ddots & -I & B \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας  $M$  είναι ένας Toeplitz, συμμετρικός και τριδιαγώνιος πίνακας με μια δομή που επιτρέπει τη χρήση ενός αλγόριθμου γρήγορης επίλυσης.

## 3.2 ΜΕΘΟΔΟΣ CYCLIC REDUCTION (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ)

Η μέθοδος Επαναληπτικής Αναγωγής (Cyclic Reduction) έχει αποδειχθεί ότι είναι αρκετά ισχυρή για την επίλυση δομημένων προβλημάτων με πίνακες. Ειδικότερα για πίνακες που είναι (μπλοκ) Toeplitz και (μπλοκ) τριδιαγώνιοι, η μέθοδος είναι αρκετά χρήσιμη. Η βασική ιδέα είναι η εξάλειψη των μισών αγνώστων, μετά ανασυγκρότηση των εξισώσεων και στην συνέχεια εκ νέου εξάλειψη των μισών από τους υπόλοιπους αγνώστους. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου έχουμε μια συνάρτηση με έναν άγνωστο. Αυτή η απλή ιδέα είναι χρήσιμη σε περιπτώσεις όπως η επίλυση της προσέγγισης πεπερασμένων διαφορών για την εξίσωση Poisson σε ένα ορθογώνιο και για την επίλυση συγκεκριμένων επαναλήψεων.

### 3.2.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Η μέθοδος προχωρά σε δύο στάδια: την αναγωγή και την πίσω-αντικατάσταση. Κατά τη διάρκεια κάθε βήματος αναγωγής, απαλείφουμε περίπου τους μισούς αγνώστους του συστήματος. Μετά από  $O(\log_2 n)$  ελαττώσεις έχει μείνει ένα σύστημα  $1 \times 1$ . Μετά την επίλυση του συστήματος αυτού, οι άγνωστοι που έχουν επαλειφθεί σε προηγούμενα βήματα υπολογίζονται με πίσω-αντικατάσταση.

### 3.2.2 Η ΦΑΣΗ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ (CYCLIC REDUCTION)

Υποθέτουμε για απλότητα ότι το σύστημα είναι μεγέθους  $n = 2^k - 1$ . Οργανώνουμε τις  $n$  εξισώσεις ομάδες των τριών:

$$\begin{aligned} -x_{i-2} + ax_{i-1} - x_i &= b_{i-1} \\ -x_{i-1} + ax_i - x_{i+1} &= b_i \\ -x_i + ax_{i+1} - x_{i+2} &= b_{i+1} \end{aligned}$$

για κάθε  $i = 2, 4, \dots, n-3, n-1$  (όπου θέτουμε  $x_0 = x_{n+1} = 0$ ). Αν πολλαπλασιάσουμε την μεσαία εξίσωση του παραπάνω συστήματος με  $\alpha$  και μετά προσθέσουμε τις τρεις εξισώσεις παίρνουμε το εξής

$$-x_{i-2} + (\alpha^2 - 2)x_i - x_{i+2} = b_{i-1} + \alpha b_i + b_{i+1}, \quad i = 2, 4, \dots, n-3, n-1$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι μόνο η παραπάνω εξίσωση περιέχει  $x_i$  με περιττό δείκτη. Το ελαττωμένο γραμμικό σύστημα έχει περίπου το μισό μέγεθος από το αρχικό και δίνεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} \alpha^{(1)} & -1 & & & \\ -1 & \alpha^{(1)} & & & \\ & -1 & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \alpha^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2^{n+1}-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{2^{n+1}-2} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

όπου  $\alpha^{(1)} = \alpha^2 - 2$ . Η (3.1) είναι ένα γραμμικό σύστημα μεγέθους  $\frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2} = (2^{k-1} - 1) \times (2^{k-1} - 1)$  όμοιο με το αρχικό. Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία αναγωγής. Δεδομένου ότι το βήμα αναγωγής διασφαλίζει την διατήρηση της μπλοκ τριδιαγώνιας μορφής, μπορούμε να εφαρμόσουμε το βήμα της αναγωγής επαναληπτικά. Μετά από  $k$  αναγωγές ( $n = 2^k - 1$ ) θα μείνει ένα σύστημα  $1 \times 1$  της μορφής

$$\alpha^{(k)} x_{2^k} = b_{2^k}^{(k)} \quad (3.2)$$

Γενικά, κατά τη διάρκεια του  $r$ -οστού βήματος αναγωγής

- απαλείφουμε τους  $x_{1 \cdot 2^{r-1}}, x_{3 \cdot 2^{r-1}}, x_{5 \cdot 2^{r-1}}, \dots, x_{(2^{k+2-r}-1) \cdot 2^{r-1}}$
- συγκρατούμε τους  $x_{1 \cdot 2^r}, x_{2 \cdot 2^r}, x_{3 \cdot 2^r}, \dots, x_{(2^{k+1-r}-1) \cdot 2^r}$

Οι συντελεστές και το δεξί μέλος του  $(2^{k-r} - 1) \times (2^{k-r} - 1)$  ελαττωμένου συστήματος που δημιουργείται κατά το  $r$ -οστό βήμα αναγωγής είναι

$$\begin{bmatrix} \alpha^{(r)} & -1 & & & \\ -1 & \alpha^{(r)} & & & \\ & -1 & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \alpha^{(r)} \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} b_{1 \cdot 2^r}^{(r)} \\ b_{2 \cdot 2^r}^{(r)} \\ \vdots \\ b_{(2^{k-r}-1) \cdot 2^r}^{(r)} \end{bmatrix},$$



αντίστοιχα, όπου τα  $\alpha^{(r)}$  και  $b_i^{(r)}$  ορίζονται από τις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις

$$\alpha^{(0)} = \alpha, \alpha^{(r+1)} = (\alpha^{(r)})^2 - 2I \quad (3.3)$$

$$b_i^{(0)} = b_i, b_i^{(r+1)} = b_{i-2r}^{(r)} + \alpha^{(r)} b_i^{(r)} + b_{i+2r}^{(r)} \quad (3.4)$$

Μόλις επιλυθεί η (3.2), η φάση της αναγωγής της μεθόδου έχει ολοκληρωθεί και ξεκινά η φάση της πίσω-αντικατάστασης.

### 3.2.3 Η ΦΑΣΗ ΤΗΣ ΠΙΣΩ-ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ (CYCLIC REDUCTION BACK-SUBSTITUTION)

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το ελαττωμένο (3.1) μαζί με το σύστημα στο οποίο έχει γίνει αναγωγή

$$\begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - x_2 \\ b_3 - x_2 - x_4 \\ \vdots \\ b_n - x_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Στο διαγώνιο σύστημα (3.5) μετακινούμε όλα τα  $x_i$  με άρτιο συντελεστή από την αριστερή πλευρά του συστήματος, στην δεξιά πλευρά των εξισώσεων του συστήματος με τις περιττούς δείκτες. Κάθε βήμα της αναγωγής παράγει ένα ελαττωμένο σύστημα αλλά και ένα αντίστοιχο απλοποιημένο σύστημα που θα επιλυθεί κατά τη διάρκεια της πίσω-αντικατάστασης. Γενικά, το  $r$ -οστό βήμα της αναγωγής παράγει ένα ελαχιστοποιημένο σύστημα το οποίο έχει συντελεστή διαγώνιου στοιχείου το  $\alpha^{(r-1)}$  και δεξιά πλευρά συστήματος

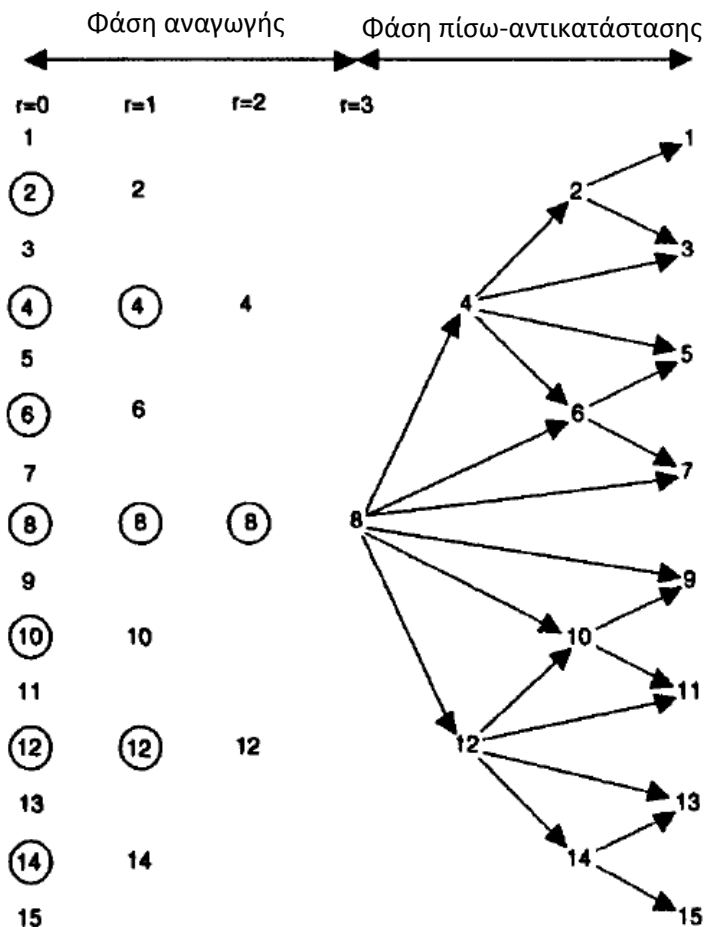
$$\begin{bmatrix} b_{1 \cdot 2^{r-1}}^{(r-1)} - x_{1 \cdot 2^r} \\ b_{3 \cdot 2^{r-1}}^{(r-1)} - x_{1 \cdot 2^r} - x_{2 \cdot 2^r} \\ \vdots \\ b_{(2^{k+1-r}-1) \cdot 2^{r-1}}^{(r-1)} - x_{(2^{k-r}-1) \cdot 2^r} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Μετά τον υπολογισμό του  $x_{2^k}$  από την (3.2), ξεκινά η πίσω-αντικατάσταση επιλύοντας το σύστημα που παράγεται στο  $k$ -οστό βήμα της αναγωγής

$$a^{(k-1)} \cdot x_{2^k} = b_{2^k}^{(k-1)} - x_{2^k}$$

Το διάνυσμα  $x_{2^k}$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του ελαττωμένου συστήματος που έχει παραχθεί κατά το  $(k-1)$ -ιοστό βήμα αναγωγής. Συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο, όλα τα  $x_i$  μπορούν να παραχθούν σε  $k$  βήματα πίσω-αντικατάστασης. Το τελευταίο βήμα που θα εκτελεστεί είναι η επίλυση του (3.5). Κατά το  $r$ -οστό βήμα πίσω-αντικατάστασης επιλύουμε για τους αγνώστους  $x_i$  με  $i = 2^{k-r} + l \cdot 2^{k-r}$   $l = 0, 1, 2, \dots, 2^r - 1$ .

Το στάδιο της πίσω-αντικατάστασης απαιτεί την επίλυση συστημάτων της μορφής  $A^{(r)}x = w$ , όπου το δεξί μέλος  $w$  περιέχει  $b_j^{(r)}$  (3.6). Στην πραγματικότητα, η (3.2) είναι επίσης αυτής της μορφής. Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα υπολογισμών για  $r=3$ . Κατά τη φάση της αναγωγής φαίνονται με κύκλο οι άγνωστοι που διατηρούνται. Κατά τη σάρωση της πίσω-αντικατάστασης φαίνονται οι άγνωστοι που μπορούμε να υπολογίσουμε με ένα βέλος.



### 3.2.4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΔΕΞΙΟΥ ΜΕΛΟΥΣ

Πρέπει να αποδείξουμε ότι η επόμενη παραγοντοποίηση ισχύει για το  $\alpha^{(r)}$ :

**Λήμμα:** Για κάθε  $r = 1, 2, 3, \dots, k$ , ισχύει

$$\alpha^{(r)} = -\prod_{l=1}^{2^r} \left( \alpha + 2 \cos \left( \frac{2l-1}{2^{r+1}} \pi \right) I \right) = 2C_{2^r}(a/2),$$

όπου το  $C_k$  υποδηλώνει ένα πολυώνυμο Chebyshev βαθμού  $k$  και πρώτου είδους.

**Απόδειξη:** Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο  $r$ . Η σχέση ισχύει ξεκάθαρα για  $r=0$ . Υποθέτουμε ότι ισχύει για  $r-1$ , δηλαδή  $\alpha^{(r-1)}$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $2^{r-1}$  το οποίο δηλώνουμε ως  $p_{r-1}(a)$ . Τότε  $\alpha^{(r)} = (\alpha^{(r-1)})^2 - 2 = (p_{r-1}(a))^2 - 2$ . Τότε το  $\alpha^{(r)}$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $2^r$ . Τώρα ψάχνουμε για τις ρίζες του  $p_r(a)$ . Αρχικά η αναζήτηση των ριζών γίνεται στο  $[-2, +2]$  και ορίζουμε το  $\varphi$  ως εξής  $\alpha = 2 \cos \varphi$ . Τότε,  $\alpha^{(1)} = \alpha^2 - 2 = 2(2 \cos^2 \varphi - 1) = 2 \cos 2\varphi$ . Μέσω επαγωγής, θέτουμε ως  $\alpha^{(r-1)} = 2 \cos 2^{r-1}\varphi$ ,

$$\alpha^{(r)} = (\alpha^{(r-1)})^2 - 2 = 2(2 \cos(\cos 2^{r-1}\varphi)^2 - 1) = 2 \cos 2^r \varphi.$$

αυτό αποδεικνύει ότι

$$\alpha^{(r)} = 2 \cos \left( 2^r \cos^{-1} \frac{a}{2} \right),$$

το  $\alpha^{(r)}$  είναι μηδέν για  $\varphi = \varphi_j$  τέτοιο ώστε  $2^r \varphi_j = (2j-1)\frac{\pi}{2}$  δηλ.,  $\varphi_j = (2j-1)\frac{\pi}{2^{r+1}}$ , όπου το  $j$  παίρνει τιμές  $1, \dots, 2^r$ . Με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε όλες τις ρίζες του  $\alpha^{(r)}$ , δεν υπάρχει κάποια ρίζα εκτός του διαστήματος  $[-2, +2]$  και το  $\alpha^{(r)}$  μπορεί να γραφεί ως

$$\alpha^{(r)} = -\prod_{l=1}^{2^r} \left( \alpha + 2 \cos \left( \frac{2l-1}{2^{r+1}} \pi \right) I \right)$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

Για την επίλυση του  $\alpha^{(r)}x = w$ , επιλύουμε τα

$$a_1^{(r)} x_1 = -w \Rightarrow x_1$$

$$a_2^{(r)} x_2 = -x_1 \Rightarrow x_2$$

$$\vdots$$

$$a_{2^r}^{(r)} x_{2^r} = -x_{2^{r-1}} \Rightarrow x_{2^r} \equiv x$$

### 3.2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ BLOCK CYCLIC REDUCTION (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΚΑΤΑ BLOCK)

Η μέθοδος μπορεί να γενικευθεί σε τριδιαγώνιους πίνακες με μπλοκ. Αναλυτικότερα, οι εξισώσεις θα έχουν την εξής μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -1 & & & \\ -1 & \mathbf{A}_2 & -1 & & \\ & -1 & \mathbf{A}_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$$

και τα στοιχεία του πίνακα και των διανυσμάτων συμβολίζονται με έντονα γράμματα γιατί έτσι υποδηλώνεται η ύπαρξη πινάκων στις θέσεις αυτές. Κάθε στοιχείο  $\mathbf{x}_i$  και  $\mathbf{b}_i$  είναι ένα διάνυσμα μεγέθους  $m$  και κάθε  $\mathbf{A}_i$  είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας μεγέθους  $m \times m$  με κυρίαρχη διαγώνιο, έτσι κάθε ένα από τα ανωτέρω  $2^r$  γραμμικά συστήματα μπορεί να επιλυθούν με απλοποίηση Gauss χωρίς στάδια(βήματα). Εναλλακτικά, αυτά τα γραμμικά συστήματα μπορούν να επιλυθούν με επαναληπτική διαβαθμισμένη ανάγωγη επειδή κάθε  $A_{2^r}^{(r)}$  είναι συμμετρικός και τριδιαγώνιος.

## 3.3 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ BUNEMAN – ΜΙΑ ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ

### 3.3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Η περιγραφή του αλγορίθμου Buneman που ακολουθεί αφορά την κατά μπλοκ υλοποίησή του. Θεωρούμε την  $j$ -ιοστή εξίσωση του πρώτου ελαχιστοποιημένου συστήματος:

$$-x_{j-2} + (A^2 - 2I)x_j - x_{j+2} = b_j^{(1)}$$

όπου το δεξί σύστημα δίνεται ως εξής

$$\begin{aligned} b_j^{(1)} &= b_{j-1} + Ab_j + b_{j+1} \\ &= b_{j-1} + A^{(1)}A^{-1}b_j + b_{j+1} + 2A^{-1}b_j \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι

$$A^{(1)}A^{-1} = (A^2 - 2I)A^{-1} = A - 2A^{-1}$$

Αν θέσουμε

$$p_j^{(1)} = A^{-1}b_j$$

και

$$q_j^{(1)} = b_{j-1} + b_{j+1} + 2A^{-1}b_j$$

τότε μπορούμε να γράψουμε

$$b_j^{(1)} = A^{(1)}p_j^{(1)} + q_j^{(1)}$$

Γενικά έχουμε

$$\begin{aligned} b_j^{(r+1)} &= b_{j-2^r}^{(r)} + A^{(r)}b_j^{(r)} + b_{j+2^r}^{(r)} \quad (3.7) \\ &= b_{j-2^r}^{(r)} + \left( (A^{(r+1)})^2 - 2I \right) (A^{(r)})^{-1}b_j^{(r)} + b_{j+2^r}^{(r)} + 2(A^{(r)})^{-1}b_j^{(r)} \\ &= A^{(r+1)}(A^{(r)})^{-1}b_j^{(r)} + b_{j-2^r}^{(r)} + b_{j+2^r}^{(r)} + 2(A^{(r)})^{-1}b_j^{(r)} \\ b_j^{(r+1)} &= A^{(r+1)}p_j^{(r+1)} + q_j^{(r+1)} \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} p_j^{(r+1)} &= (A^{(r)})^{-1}b_j^{(r)} \quad (3.8) \\ q_j^{(r+1)} &= b_{j-2^r}^{(r)} + b_{j+2^r}^{(r)} + 2(A^{(r)})^{-1}b_j^{(r)} \end{aligned}$$

Η ανασυγκρότηση του υπολογισμού των  $b_j^{(r)}$ , προτάθηκε από τον Buneman.

Μπορούμε να δημιουργήσουμε αναδρομική σχέση για τα  $p_j^{(r)}$  και  $q_j^{(r)}$  μέσω της αντικατάστασης της (3.8) στην (3.7):

$$b_j^{(r+1)} = b_{j-2^r}^{(r)} + A^{(r)}b_j^{(r)} + b_{j+2^r}^{(r)}$$

$$= A^{(r)}p_{j-2^r}^{(r)} + q_{j-2^r}^{(r)} + A^{(r)}p_{j+2^r}^{(r)} + q_{j+2^r}^{(r)} + A^{(r)}(A^{(r)}p_j^{(r)} + q_j^{(r)})$$

$$\begin{aligned} A^{(r+1)}p_j^{(r+1)} + q_j^{(r+1)} &= \\ &= A^{(r+1)}(p_j^{(r)} + (A^{(r)})^{-1}(p_{j-2^r}^{(r)} + p_{j+2^r}^{(r)} + q_j^{(r)})) + q_{j-2^r}^{(r)} + q_{j+2^r}^{(r)} \\ &\quad + 2(p_j^{(r)} + (A^{(r)})^{-1}(p_{j-2^r}^{(r)} + p_{j+2^r}^{(r)} + q_j^{(r)})) \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τους όρους, προκύπτουν τα εξής

$$(3.8) \quad p_j^{(r+1)} = p_j^{(r)} + (A^{(r)})^{-1}(p_{j-2^r}^{(r)} + p_{j+2^r}^{(r)} + q_j^{(r)})$$

$$(3.9) \quad q_j^{(r+1)} = q_{j-2^r}^{(r)} + q_{j+2^r}^{(r)} + 2p_j^{(r+1)}$$

Τα  $p_j^{(r)}$  και  $q_j^{(r)}$  υπολογίζονται ως εξής:

1. Για  $j = 1, 2, \dots, 2^k - 1$ , αρχικοποίηση  $p_j^{(0)} = 0, q_j^{(r)} = b_j$ .

2. Για  $j = 1, 2, \dots, k$  (βήμα ελάττωσης  $r$ )

Για  $j = 1 \cdot 2^r, 2 \cdot 2^r, \dots, 2^{k-r} \cdot 2^r \equiv 2^k$

- Επίλυση των  $A^{(r-1)}v = p_{j-2^{r-1}}^{(r-1)} + p_{j+2^{r-1}}^{(r-1)} + q_j^{(r-1)}$  για  $v$  χρησιμοποιώντας την μέθοδο που έχει περιγραφεί στην παράγραφο 3.2.1.3.
- Υπολογισμός του  $p_j^{(r)} = p_j^{(r-1)} + v$ .
- Υπολογισμός του  $q_j^{(r)} = q_{j-2^{r-1}}^{(r-1)} + q_{j+2^{r-1}}^{(r-1)} + 2p_j^{(r)}$ .

Για τα βήματα πίσω-αντικατάστασης

$$-x_{j-2^r} + A^{(r)}x_j - x_{j+2^r} = A^{(r)}p_j^{(r)} + q_j^{(r-1)}$$

$$A^{(r)}(x_j - p_j^{(r)}) = q_j^{(r-1)} + x_{j-2^r} + x_{j+2^r}$$

Έτσι για τον υπολογισμό του  $x_j$  με βάση τα  $x_{j-2^r}$  και  $x_{j+2^r}$ , πρώτα επιλύουμε

$$A^{(r)}v = q_j^{(r)} + x_{j-2^r} + x_{j+2^r}$$

ως προς  $v$ , και μετά υπολογίζουμε

$$x_j = q_j^{(r)} + v$$

### 3.3.3 ΨΕΥΔΙΚΩΔΙΚΑΣ ΜΕΘΟΔΟΥ BUNEMAN

Αρχικά γίνεται μια υπόθεση για τη λύση  $x^{(0)}$

Για  $j=1, 2, \dots, n$

$$p_j^{(0)} = 0, q_j^{(0)} = b_j.$$

Τέλος

$r=0$

Όσο  $2^r < n$

// Η φάση της αναγωγής

Για  $j=1, 2, \dots, 2^{(r-1)}$

$$\text{Επίλυση του } A^{(r-1)}v = p_{j-2^{r-1}}^{(r-1)} + p_{j+2^{r-1}}^{(r-1)} + q_j^{(r-1)} \text{ ως προς } v$$

$$\text{Υπολογισμός του } p_j^{(r)} = p_j^{(r-1)} + v.$$

$$\text{Υπολογισμός του } q_j^{(r)} = q_{j-2^{r-1}}^{(r-1)} + q_{j+2^{r-1}}^{(r-1)} + 2p_j^{(r)}.$$

Τέλος

$r=r+1$

Τέλος

$$A^{(r)}v = q_{2^r}^{(r)}$$

$$x_r = q_{2^r}^{(r)} + v$$

Όσο  $2^r > 1$

// Η φάση της πίσω-αντικατάστασης

$r=r-1$

Για  $j=1, 2, \dots, 2^{(r-1)}$

$$\text{Επίλυση του } A^{(r)}v = q_j^{(r)} + x_{j-2^r} + x_{j+2^r} \text{ ως προς } v$$

$$x_j = q_j^{(r)} + v$$

Τέλος

Τέλος

### 3.3.2 ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

Υποθέτουμε για απλότητα ότι το σύστημα είναι μεγέθους  $n = 2^k - 1$ . Σε κάθε βήμα της αναγωγής λύνουμε ένα τριδιαγώνιο σύστημα μεγέθους  $m$ . Για να λύσουμε τα  $2^{k-r} - 1$  δεξιά μέλη με τον  $A^{(r-1)}$ :

$$2^{r-1} \cdot (2^{k-r} - 1) \cdot \mathcal{O}(m).$$

Οι πράξεις που απαιτούνται συνολικά είναι οι εξής

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{k-1} 2^{r-1} (2^{k-r} - 1) \mathcal{O}(m) + \text{χαμ. τάξης} \\ &= \mathcal{O}(m) \cdot \left[ (k-1)2^{k-1} - \sum_{r=1}^{k-1} 2^{r-1} \right] + \text{χαμ. τάξης} \\ &= \mathcal{O}(m) \cdot [(k-1)2^{k-1} - (2^{k-1} - 1)] \end{aligned}$$

Ασυμπτωτικά προκύπτει ότι

$$\mathcal{O}(m \cdot n \cdot \log n)$$



## 4. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ

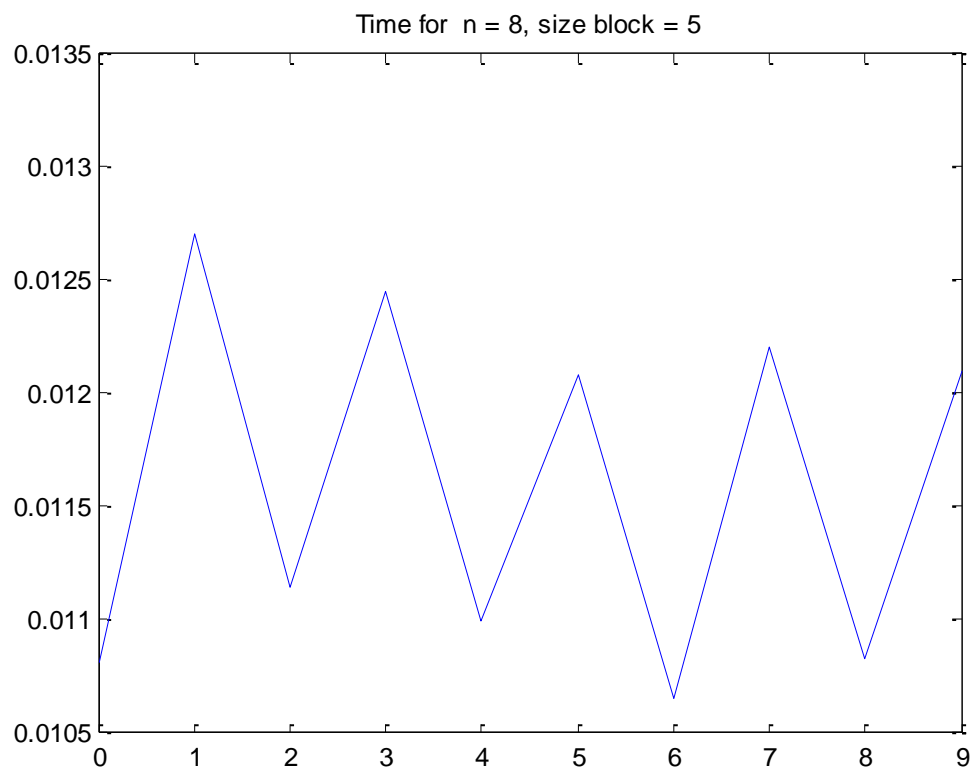
Τα πειραματικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται παρακάτω αναφέρονται στην εκτέλεση του βήματος προ-ρύθμισης (preconditioning step) της προσταθεροποιημένης μεθόδου συζυγών κλίσεων (preconditioned conjugate gradients), όπου καλείται η μέθοδος Buneman με πίνακα προ-ρύθμισης τον τριδιαγώνιο πίνακα με κύρια διαγώνιο  $(-1, 4, -1)$  και άνω και κάτω διαγώνια στοιχεία  $(-1)$  και περιγράφεται στο παράρτημα .

Επίσης τα χαρακτηριστικά του μηχανήματος εκτέλεσης είναι τα εξής:

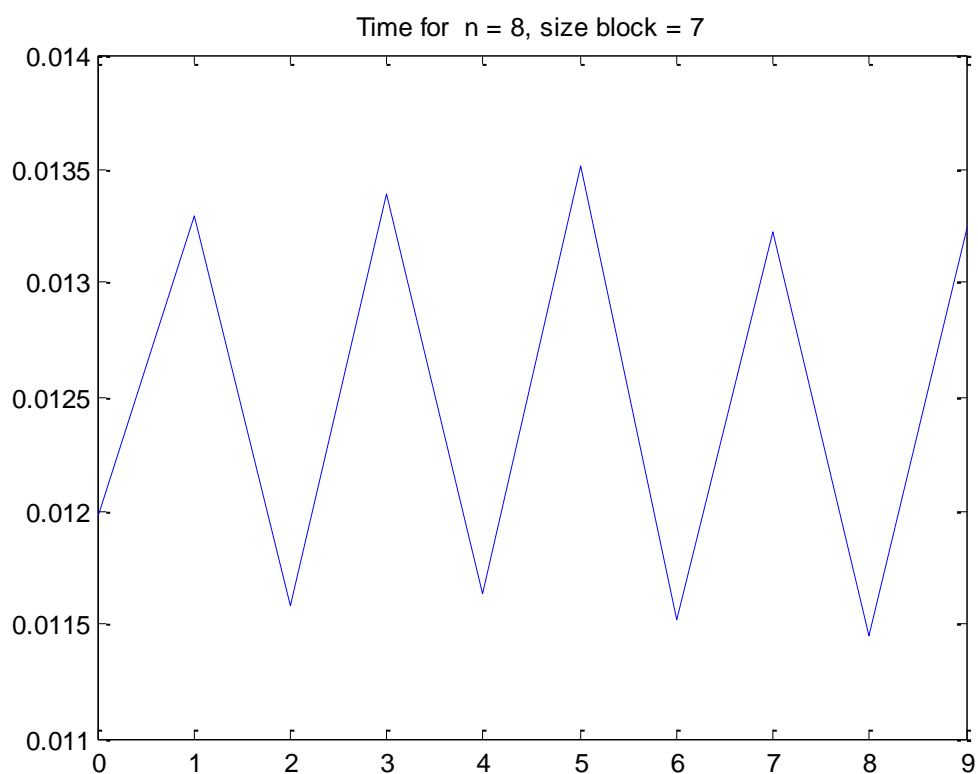
CPU: Intel(R) Pentium(R) CPU B940, 2,00 GHz

RAM: 3GB

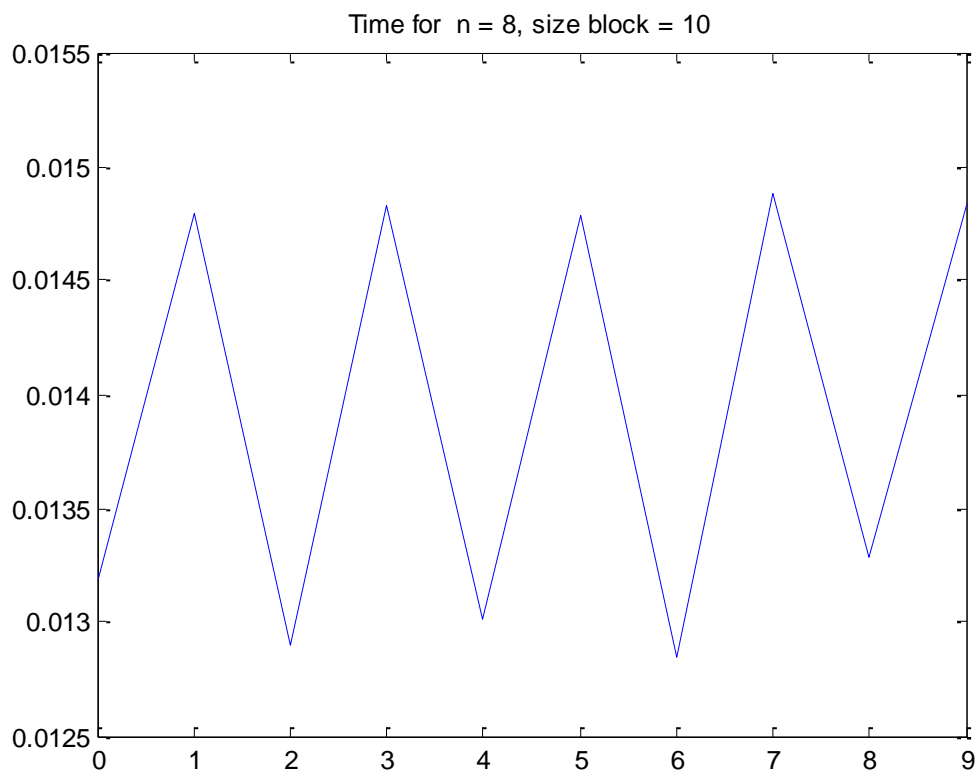
Time for $n = 8$ , size block = 5	
Forward solution time	Back substitution time
1.081519e-002	1.270257e-002
1.114156e-002	1.244856e-002
1.099993e-002	1.208678e-002
1.065663e-002	1.220840e-002
1.082546e-002	1.210372e-002



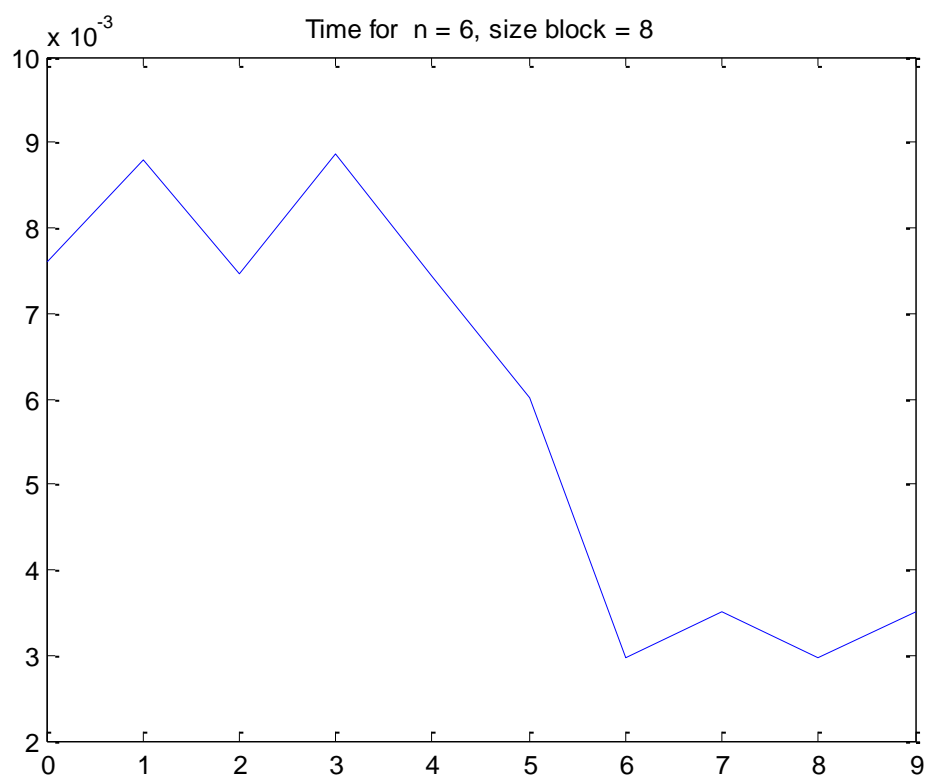
Time for $n = 8$ , size block = 7	
Forward solution time	Back substitution time
1.197954e-002	1.329269e-002
1.158338e-002	1.339224e-002
1.163572e-002	1.351386e-002
1.152334e-002	1.322188e-002
1.144791e-002	1.323830e-002



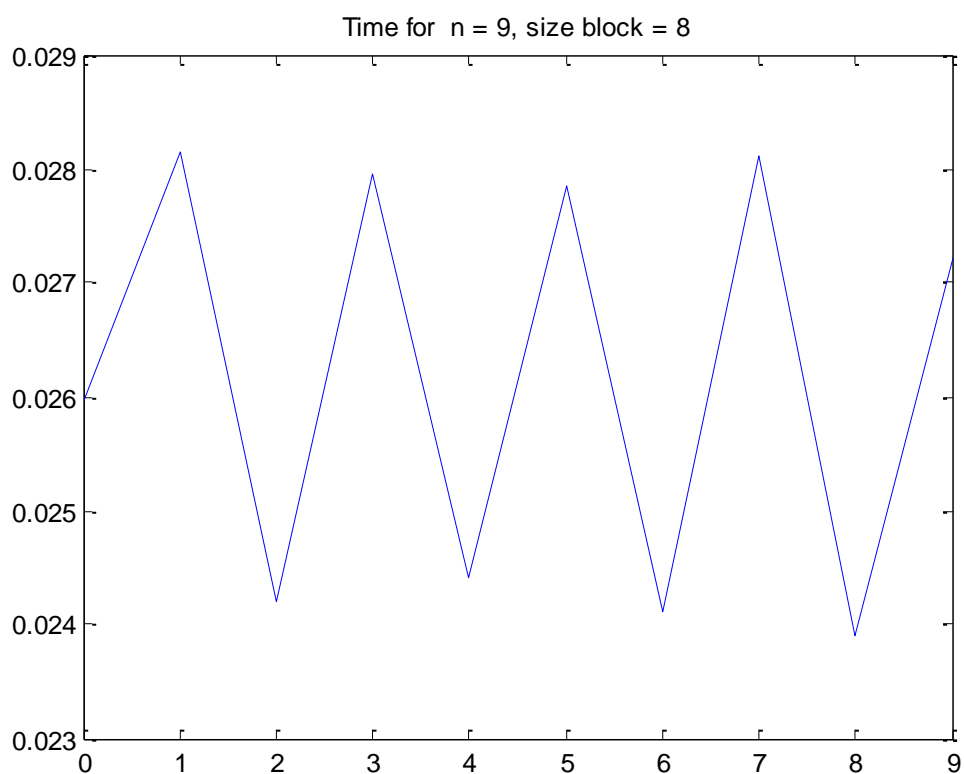
Time for $n = 8$ , size block = 10	
Forward solution time	Back substitution time
1.319263e-002	1.479777e-002
1.290321e-002	1.483163e-002
1.300943e-002	1.478596e-002
1.284728e-002	1.488295e-002
1.328551e-002	1.483985e-002



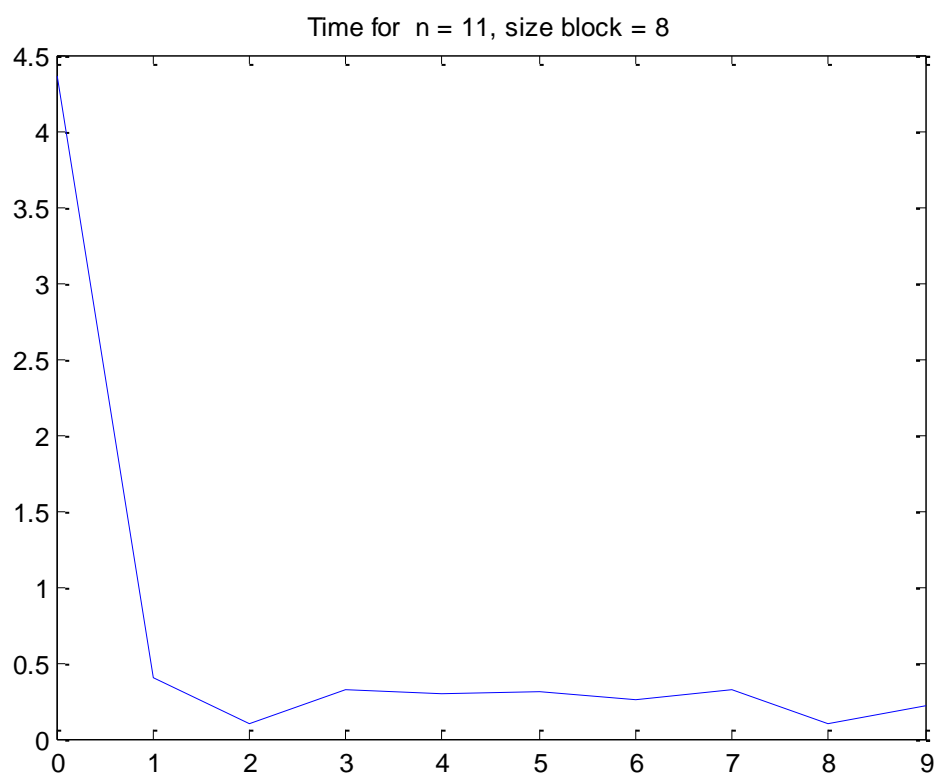
Time for n = 6, size block = 8	
Forward solution time	Back substitution time
7.593625e-003	8.806203e-003
7.452508e-003	8.873426e-003
7.436087e-003	6.020300e-003
2.968585e-003	3.510987e-003
2.972690e-003	3.511500e-003



Time for $n = 9$ , size block = 8	
Forward solution time	Back substitution time
2.597832e-002	2.815152e-002
2.420846e-002	2.796474e-002
2.441013e-002	2.784261e-002
2.411096e-002	2.810996e-002
2.389903e-002	2.721707e-002



Time for n = 11, size block = 8	
Forward solution time	Back substitution time
4.366715e+000	3.950548e-001
1.043746e-001	3.264494e-001
2.974199e-001	3.054384e-001
2.630992e-001	3.239539e-001
9.668247e-002	2.201171e-001



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB

### A. ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ

```
n1=300;  
n2=300;  
vn=2;  
  
n=n1*n2;  
b=n1*(n2-1)+n2*(n1-1)+vn;  
  
nper=randperm(n);  
ivn=nper(:,1:vn);  
  
rsh=0.1;  
rsv=0.1;  
lsh=0.2;  
lsv=0.2;  
sizv=350;  
sizh=350;  
pv=sizh/(n1-1);  
ph=sizv/(n2-1);  
rpin=50;  
lpin=100;  
cpph=1e-4;  
cppv=1e-4;  
cffh=1e-4;  
cffv=1e-4;  
cpin=0.01;  
  
w=floor(10*rand([n2+n1 1]));
```



```

h=10; %sampling step (in ps)

%capacitance and incidence matrix
ch= repmat (cpph*pv*w(1:n2,:)+cffh*pv,1,n1-1); %horizontal

cv= repmat (cppv*ph*w(n2+1:n2+n1,:)+cffv*ph,1,n2-1); %vertical

C=sparse(n,n);
A1=sparse(n,b);

%enumerate horizontal branches
for i=1:n2
for j=1:n1-1
ni1=(i-1)*n1+j; %node indices for current branch
ni2=ni1+1;
ni3=(i-1)*(n1-1)+j; %branch index conversion from %2D to 1D
C(ni1,ni1)=C(ni1,ni1)+(1/2)*ch(i,j);
C(ni2,ni2)=C(ni2,ni2)+(1/2)*ch(i,j);
A1(ni1,ni3)=1;
A1(ni2,ni3)=-1;
end
end

%enumerate vertical branches
for i=1:n1
for j=1:n2-1
ni1=(j-1)*n1+i; %node indices for current branch
ni2=ni1+n1;
ni3=(i-1)*(n2-1)+j+n2*(n1-1); %branch index conversion from 2D
to %1D
C(ni1,ni1)=C(ni1,ni1)+(1/2)*cv(i,j);
C(ni2,ni2)=C(ni2,ni2)+(1/2)*cv(i,j);
A1(ni1,ni3)=1;

```

```

Al(ni2,ni3)=-1;
end
end

%enumerate supply branches
for i=1:vn
C(ivn(i),ivn(i))=C(ivn(i),ivn(i))+cpin;
Al(ivn(i),n1*(n2-1)+n2*(n1-1)+i)=-1;
end

%inductance matrix
lh= repmat(lsh*pv*log(150./w(1:n2,:)),1,n1-1);
lv= repmat(lsv*ph*log(150./w(n2+1:n2+n1,:)),1,n2-1);

lb=[reshape(lh',n2*(n1-1),1);reshape(lv',n1*(n2-
1),1);lpin*ones(vn,1)];

%resistance matrix
rh= repmat(rsh*pv./w(1:n2,:),1,n1-1); %horizontal branch
resistances
rv= repmat(rsv*ph./w(n2+1:n2+n1,:),1,n2-1); %vertical branch
resistances

rb=[reshape(rh',n2*(n1-1),1);reshape(rv',n1*(n2-
1),1);rpin*ones(vn,1)];

%system matrix for transient analysis
RLcol=1./(rb+lb/h);
RL=spdiags(RLcol,0,b,b);
A=Al*RL*Al'+C/h;

```

## **Β. ΚΩΔΙΚΑΣ ΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΕΙ ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ ΠΡΟ-ΡΥΘΜΙΣΗΣ**

```
function [A, n, szBlk] = matrixconstr2(n, szBlk)
```

```
N=(2^n-1)*szBlk;
```

```
A=zeros(N);
```

```
for i = 1:N
```

```
    A(i,i)=4;
```

```
    if mod(i,szBlk)~=0
```

```
        A(i+1,i)=-1;
```

```
        A(i,i+1)=-1;
```

```
    end
```

```
end
```

```
for i = 1 : N-szBlk
```

```
    A(i+szBlk,i)=-1;
```

```
    A(i,i+szBlk)=-1;
```

```
end
```

```
clear i ;
```

```
A=sparse(A);
```

## **Γ. ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ BUNEMAN**

```
function [U,time1,time2] = buneman2(Pin,b,N,szBlk)
```

```
%Το πλήθος των μπλοκ είναι 2^N -1 και szBlk είναι το μέγεθος  
του μπλοκ
```

```

nblk = 2^N-1;
b = reshape(b,szBlk,nblk);
numBlockLevel = zeros(1,floor(log2(nblk))+1);
V = zeros(szBlk,1);
K = eye(szBlk,szBlk);

A(1:szBlk,1:szBlk)=Pin(1:szBlk,1:szBlk);

i=0;
j=1;
while nblk >= 1
    i=i+nblk;
    numBlockLevel(j)= nblk;
    j=j+1;
    nblk=floor(nblk/2);
end

nblk = 2^N-1;
sz=i;
Q = zeros(szBlk,i);
P = Q;
U = Q;

for i = 1:nblk
    Q(1:szBlk,i)=b(1:szBlk,i);
end

r=1;
se=0;
while 2^r<nblk

    id=2;
    id2=1;

```

```

    for i = 1:2^(r-1)

        K=(A(1:szBlk,1:szBlk)-2*cos((2*i-
1)/(2^(r+1))))*pi*eye(szBlk))*K;

    end

    while id < numBlockLevel(r)

        V(1:szBlk,1) = K\ (Q(1:szBlk,se+id)+P(1:szBlk,se+id-
1)+P(1:szBlk,se+id+1));

        P(1:szBlk,se+id2+numBlockLevel(r)) =
P(1:szBlk,se+id)+V(1:szBlk,1);

        Q(1:szBlk,se+id2+numBlockLevel(r)) = Q(1:szBlk,se+id-
1)+Q(1:szBlk,se+id+1);

        id=id+2;
        id2=id2+1;
    end

    se=se+numBlockLevel(r);
    r=r+1;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%The back substitution phase%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear Pin;

r=N;
K = eye(szBlk,szBlk);
for i = 1:2^(r-1)

```

```

        K=(A(1:szBlk,1:szBlk)-2*cos((2*i-
1)/(2^(r+1))))*pi*eye(szBlk))*K;

end

U(1:szBlk,sz)=P(1:szBlk,sz)+(K\Q(1:szBlk,sz));

r=N-1;

ds=sz;
i=ds-3;

for k = floor(log2(nblk)): -1: 1

    K = eye(szBlk,szBlk);
    for i = 1:2^(r-1)

        K=(A(1:szBlk,1:szBlk)-2*cos((2*i-
1)/(2^(r+1))))*pi*eye(szBlk))*K;

    end

    for j= 1: numBlockLevel(k)
        i=i+1;

        if mod(j,2)==0

            U(1:szBlk,i) = U(1:szBlk,ds);

        else

            if (j==1) || (j==numBlockLevel(k))

                V(1:szBlk,1)= K\ (U(1:szBlk,ds)+Q(1:szBlk,i));
                U(1:szBlk,i)= P(1:szBlk,i)+V(1:szBlk,1);
            end
        end
    end
end

```

```

else

    V(1:szBlk,1)=
    K\ (U(1:szBlk,ds)+U(1:szBlk,ds+1)+Q(1:szBlk,i));

    U(1:szBlk,i)= P(1:szBlk,i)+V(1:szBlk,1);

    ds=ds+1;
end
end
end

if k>1
    i = i-numBlockLevel(k)-numBlockLevel(k-1);
    ds = ds-numBlockLevel(k)-numBlockLevel(k+1) +1;
end
r=r-1;
end

U=U(1:szBlk,1:nblk);
U=U(:);

clear P Q;

```

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Golub G.H., van Loan C.F., “*Matrix computations (3ed.)*”, 1996
- [2] Scott Cohen, “*Cyclic Reduction*”, November 10, 1994
- [3] Yousef Saad, “*Iterative methods for sparse linear systems*”, Second edition, 2003
- [4] Gerard Meurant, “*Computer solution of large linear systems*” STUDIES IN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS VOLUME 28, North Holland, 1999
- [5] Νίκος Ι. Μάργαρης, “*Ανάλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων*”, Τόμος Α
- [6] W. Gander and G. H. Golub, “*Cyclic reduction—history and applications*” In Scientific computing (Hong Kong, 1997), pages 73–85. Springer, Singapore, 1997
- [7] E. Gallopoulos and Y. Saad, “*A parallel block cyclic reduction algorithm for the fast solution of elliptic equations*”, Parallel Computing 10 (1989) 143-159, North-Holland, March 1988
- [8] Richard S. Varga, “*Matrix Iterative Analysis, Second Revised and Expanded Edition*”, USA, 2000
- [9] Anantha Chandrakasan, William J. Bowhill, Frank Fox, “*Design of high performance microprocessor circuits*”, 2001
- [10] P. Concus, G. H. Golub and G. Meurant, “*Block Preconditioning for the Conjugate Gradient Method*”, SIAM J. Sci. STAT. COMPUT. Vol. 6, No. 1, January 1985
- [11] Paul N. Swarztrauber and Roland A. Sweet, “*The Fourier and Cyclic Reduction*



*Methods for Solving Poisson's Equation*" Handbook of Fluid Dynamics and Fluid Machinery, J. A. Schetz and A. E. Fuhs, eds., John Wiley & Sons, New York, NY, 1996

- [12] Dario A. Bini · Beatrice Meini, "*The Cyclic Reduction Algorithm: From Poisson Equation to Stochastic Processes and Beyond*"
- [13] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., "*Numerical recipes in C The Art of Scientific Computing, Second Edition*", CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1997
- [14] D. A. Bini and B. Iannazzo, "*A Cyclic Reduction Method for Solving Algebraic Riccati Equations*", December 23, 2006
- [15] Don E. Heller, "*Some aspects of the cyclic reduction algorithm for block tridiagonal linear systems*" Paper 1633, 1975